TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 19, Số 8 (2022): 1332-1345

Vol. 19, No. 8 (2022): 1332-1345

ISSN: 2734-9918

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3543(2022)

Bài báo nghiên cứu

BẬC TÔPÔ CỦA MỘT SỐ LỚP ÁNH XẠ ĐA TRỊ TÁC ĐỘNG TRONG KHÔNG GIAN BANACH CÓ THỨ TỰ

***Nguyễn Bích Huy*[1], *Nguyễn Đăng Quang*[2*],**

[1]*Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[2]*Trường Đại học FPT – Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*

[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Đăng Quang – Email: quangnd32@fe.edu.vn*

Ngày nhận bài: 22-7-2022; ngày nhận bài sửa: 12-8-2022; ngày duyệt đăng: 20-8-2022

TÓM TẮT

Lí thuyết bậc tôpô cho các ánh xạ đa trị trong các không gian Banach có thứ tự được xây dựng bởi nhiều nhà toán học trong thập niên 1970, và đã cung cấp được một công cụ mới, hiệu quả trong nghiên cứu các bao hàm thức vi phân và đạo hàm riêng. Trong bài báo này, dựa trên các kết quả tổng quát về bậc tôpô của ánh xạ đa trị trong không gian Banach có thứ tự, chúng tôi chứng minh một số kết quả mới về bậc tôpô này để dễ áp dụng vào các bài toán cụ thể. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng đạo hàm theo nón của ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và có giá trị lồi, đóng cũng là ánh xạ compact và bậc tôpô của ánh xạ ban đầu có thể tính dựa vào bậc tôpô của ánh xạ đạo hàm.

Từ khóa: ánh xạ đa trị nửa liên tục trên compact; nón; bậc tôpô; quan hệ thứ tự

1. Giới thiệu

Định lí Banach về điểm bất động của ánh xạ co cho phép chứng minh sự tồn tại, duy nhất nghiệm và xây dựng dãy lặp hội tụ về nghiệm của các phương trình vi phân thường. Định lí điểm bất động của Schauder cho phép chứng minh sự tồn tại nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng. Điểm hạn chế của Định lí Schauder là không cho phép khẳng định nghiệm tìm được là không tầm thường (thông thường, các phương trình xuất phát từ thực tế luôn có nghiệm tầm thường là hằng số không). Hạn chế này được khắc phục nhờ lí thuyết bậc tôpô cho ánh xạ đơn trị, được Leray – Schauder xây dựng và phát triển trong các công trình của M. Krasnosel’skii và cộng sự, của F. Browder, V. Petryshyn... Lí thuyết này cho phép chứng minh sự tồn tại nghiệm không tầm thường, có các tính chất đặc biệt (dương, lồi…), đánh giá số nghiệm và nghiên cứu cấu trúc của tập nghiệm (xem Deimling, 1985; Guo & Lakshmikantham, 1988; O'Regan, Cho, & Chen, 2006).

Các ánh xạ đa trị được quan tâm nghiên cứu nhiều từ những năm 1950 do sự phát triển nội tại của toán học cũng như để giải quyết một số bài toán xuất phát từ khoa học tự nhiên,

Cite this article as: Nguyen Dang Quang, & Nguyen Bich Huy (2022). Fixed point index for some classes of multivalued mappings in ordered Banach spaces. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(8), 1332-1345.

kĩ thuật, kinh tế... Các định lí điểm bất động cho ánh xạ đa trị của S. Nadler, K. Fan là sự mở rộng của các định lí của Banach và Schauder. Lí thuyết bậc tôpô cho ánh xạ đa trị được xây dựng trong thập niên 1970 trong các công trình của T. Ma, của Borisovich và các cộng sự, của Petryshyn... và đã tìm được các ứng dụng cho các bao hàm thức vi phân (Borisovich et al., 2011; Deimling, 1985; Fitzpatrick, & Petryshyn, 1975) và các tài liệu tham khảo trong đó). Gần đây, các ứng dụng mới của bậc tôpô của ánh xạ đa trị được đưa ra trong (Nguyen, Tran, & Vo, 2018), (Vo, 2016).

Điểm mới của bài báo là dựa trên các kết quả về bậc tôpô của ánh xạ đa trị trong không gian Banach có thứ tự, chúng tôi đã thiết lập thêm một số kết quả về bậc tôpô này nhằm mục đích áp dụng để giải các bài toán cụ thể. Đồng thời, kết quả về tính compact của đạo hàm theo nón của ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và có giá trị lồi, đóng cũng đã được chứng minh. Cuối cùng, chúng tôi sử dụng bậc tôpô của ánh xạ đạo hàm tính bậc tôpô cho ánh xạ đa trị ban đầu.

2. Các khái niệm được sử dụng và kết quả chính

Giả sử *X* là không gian Banach trên trường số thực và $K \subset X$. *K* được gọi là nón trong *X* nếu:

(i) K là tập đóng trong *X*,

(ii) $K+K \subset K$, $\lambda K \subset K$, $\forall \lambda \geq 0$,

(iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

Nếu *K* là nón thì thứ tự trong *X* sinh bởi *K* được xác định bởi $x \leq y \Leftrightarrow y-x \in K.$ Khi đó ta nói cặp (*X*, *K*) là không gian Banach có thứ tự.

2.1. Ánh xạ đa trị

Định nghĩa 2.1. (Deimling, 1985; De Blasi, 1976)

Cho X, Y là các không gian Banach trên trường số thực và ánh xạ đa trị $F: D \subset X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$.

(i) F được gọi là nửa liên tục trên trong *D* nếu với mọi tập hợp *V* mở trong *Y* thì tập hợp $F^+(V) = \{x \in D : F(x) \subset V\}$ mở trong *D*.

(ii) *F* được gọi là ánh xạ compact nếu $F(S) = \bigcup_{x \in S} F(x)$ là tập compact tương đối trong *Y*, với *S* là tập bị chặn bất kì trong *D*.

(iii) *F* được gọi là thuần nhất dương nếu $F(tx) = tF(x)$, $\forall t > 0$, $\forall x \in D$.

(iv) Với $K \subset Y$, ta kí hiệu $cc(K)$ là tập các tập con lồi, đóng, khác rỗng trong *K*.

(v) Giả sử $A, B \subset X$ là các tập hợp khác rỗng, ta định nghĩa khoảng cách Hausdorff giữa *A*, *B*, kí hiệu $d_H(A, B)$, bởi

$$d_H(A,B) = \max\left\{\sup_{x \in A} d(x,B), \sup_{y \in B} d(y,A)\right\},$$

trong đó $d(x,U)=\inf_{u\in U}\|x-u\|$.

Mệnh đề 2.2. (Deimling, 1985)

Cho X,Y là các không gian Banach trên trường số thực và ánh xạ đa trị $F:D\subset X\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$.

(i) F là nửa liên tục trên trong D khi và chỉ khi với mọi $x_0\in D$ và với mọi tập mở V chứa $F(x_0)$ thì tồn tại số $r>0$ sao cho $F\left(B(x_0,r)\cap D\right)\subset V$.

(ii) Giả sử F là nửa liên tục trên trong D, dãy $\{x_n\}_n\subset D$ và $\lim_{n\to+\infty}x_n=x_0$, dãy $\{y_n\}_n\subset Y$ thỏa mãn $y_n\in F(x_n),\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_{n\to+\infty}y_n=y_0$ và $F(x_0)$ là tập đóng. Khi đó, $y_0\in F(x_0)$.

Định nghĩa 2.3. (De Blasi, 1976)

Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Y là không gian Banach. Ta kí hiệu $K_r=K\cap\overline{B}(\theta,r)$, $r>0$.

1) Tập $D\subset X$ gọi là một K – lân cận của x nếu $\exists r>0: x+K_r\subset D$.

2) Cho D là một K – lân cận của x_0. Ánh xạ đa trị $A:D\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ có giá trị đóng, bị chặn gọi là khả vi Fréchet theo nón K tại x_0 nếu tồn tại ánh xạ đa trị $F:X\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ nửa liên tục trên có giá trị lồi, đóng, bị chặn và thuần nhất dương sao cho

$$\lim_{\substack{\|h\|\to 0\\ h\in K}}\frac{d_H\left(A(x_0+h),A(x_0)+F(h)\right)}{\|h\|}=0.$$

Ánh xạ F gọi là đạo hàm của A tại x_0, kí hiệu A'_{x_0}.

3) Ánh xạ đa trị $A:K\setminus K_r\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ ($r>0$ đủ lớn) có giá trị đóng, bị chặn gọi là khả vi Fréchet theo nón K tại ∞ nếu tồn tại ánh xạ đa trị $F:X\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ nửa liên tục trên có giá trị lồi, đóng, bị chặn và thuần nhất dương sao cho

$$\lim_{\substack{\|h\|\to\infty\\ h\in K}}\frac{d_H\left(A(h),F(h)\right)}{\|h\|}=0.$$

Ánh xạ F gọi là đạo hàm của A tại ∞, kí hiệu A'_∞.

2.2. Bậc tôpô của ánh xạ đa trị tác động trong không gian Banach có thứ tự

Định nghĩa 2.4. (Borisovich et al., 2011; Fitzpatrick & Petryshyn, 1975)

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong không gian Banach X với thứ tự sinh bởi nón K và $A:K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact sao cho $x\notin A(x),\ \forall x\in K\cap\partial\Omega$ (ta nói A không suy biến trên $K\cap\partial\Omega$). Khi đó tồn tại ánh xạ đơn trị, compact $f: K\cap\partial\Omega \to K$ đồng luân với A trên $K\cap\partial\Omega$, nghĩa là tồn tại ánh xạ đa trị $G:\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1]\to cc(K)$ là nửa liên tục trên, compact sao cho

$$x\notin G(x,t)\ ,\forall(x,t)\in\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1]\ ;\ G(.,1)=A\ ,\ G(.,0)=f.$$

Ta định nghĩa bậc tôpô $i_K(A,\Omega)$ theo nón K của ánh xạ A trên tập Ω, bởi

$$i_K(A,\Omega)=i_K(f,\Omega),$$

trong đó $i_K(f,\Omega)$ là bậc tôpô theo nón K của ánh xạ đơn trị f trên tập Ω.

Mệnh đề 2.5. (Borisovich et al., 2011)

Giả sử $\left(X,K\right)$ là không gian Banach có thứ tự $\Omega\subset X$ là tập mở, bị chặn. Trong các tính chất 1 – 3, ta giả sử ánh xạ A xác định trên $K\cap\partial\Omega$, còn trong các tính chất 4 – 5, ta giả sử ánh xạ A xác định trên $K\cap\overline{\Omega}$, nhận giá trị trong $cc(K)$ và là nửa liên tục trên, compact.

1. Tính chất chuẩn hóa

Nếu $A(x)\equiv C$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$ trong đó $C\subset K$ là tập lồi, compact thì

$$i_K(A,\Omega)=\begin{cases}1 & \text{khi } C\subset K\cap\Omega,\\ 0 & \text{khi } C\subset K\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}$$

2. Tính chất bất biến qua đồng luân

Nếu $H:\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1]\to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và không suy biến thì

$$i_K\left(H(.,1),\Omega\right)=i_K\left(H(.,0),\Omega\right).$$

3. Tính chất Poincaré

Giả sử $A_1: K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact, không suy biến trên $K\cap\partial\Omega$ và thỏa mãn

$$\frac{x-y}{\|x-y\|}\neq-\frac{x-z}{\|x-z\|},$$

với mọi $y\in A(x),\ z\in A_1(x),\ x\in K\cap\partial\Omega$. Khi đó, $i_K(A,\Omega)=i_K(A_1,\Omega)$.

4. Tính chất cộng tính

Giả sử Ω_1,Ω_2 là các tập mở không giao nhau. Nếu

$$x\notin A(x)\ ,\ \forall x\in K\cap\left(\overline{\Omega}\setminus(\Omega_1\cup\Omega_2)\right)\ \text{thì}$$

$$i_K(A,\Omega)=i_K(A,\Omega_1)+i_K(A,\Omega_2).$$

5. Nếu $i_K(A,\Omega)\neq 0$ thì A có điểm bất động trong Ω.

2.3. *Các kết quả chính*

Định lí 2.6. Cho (X,K) là không gian Banach có thứ tự, $\Omega \subset X$ là tập mở, bị chặn, $A: K \cap \partial\Omega \to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact. Giả sử tồn tại tập lồi, compact $C \subset K$ sao cho

$$t(x-u) \notin A(x)-x,\ \forall t \ge 0\ ,\ \forall u \in C\ ,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega .$$

Khi đó,

$$i_K(A,\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{khi } C \subset K \cap \Omega, \\ 0 & \text{khi } C \subset K \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Đặc biệt, nếu tồn tại phần tử $u \in K$ sao cho

$$t(x-u) \notin A(x)-x,\ \forall t \ge 0\ ,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega$$

thì

$$i_K(A,\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{khi } u \in \Omega, \\ 0 & \text{khi } u \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Chứng minh.

Xét ánh xạ đa trị hằng $A_1(x) \equiv C$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega$. Điều kiện nêu trong Định lí 2.6 có thể viết lại dưới dạng:

$$\frac{x-y}{\|x-y\|} \ne -\frac{x-z}{\|x-z\|},\ \forall y \in A(x),\ \forall z \in A_1(x),\ \forall x \in K \cap \partial\Omega .$$

Áp dụng Mệnh đề 2.5, ta có

$$i_K(A,\Omega) = \begin{cases} 1 & \text{khi } C \subset K \cap \Omega, \\ 0 & \text{khi } C \subset K \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Định nghĩa 2.7.

Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, $\alpha: K \to \mathbb{R}$ là hàm số lồi, liên tục, $\beta: K \to \mathbb{R}$ là hàm số lõm, liên tục. Với $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ cho trước, ta đặt

$$K(\alpha,\lambda) = \{x \in K : \alpha(x) \le \lambda\},$$
$$K(\beta,\mu) = \{x \in K : \beta(x) \ge \mu\},$$
$$K(\alpha,\beta,\lambda,\mu) = K(\alpha,\lambda) \cap K(\beta,\mu).$$

Định lí 2.8.

Cho (X,K) là không gian Banach có thứ tự, $\alpha: K \to \mathbb{R}$ là hàm số lồi, liên tục, $\beta: K \to \mathbb{R}$ là hàm số lõm, liên tục sao cho tập hợp $\{x \in K : \alpha(x) < \lambda\}$ khác rỗng và bị chặn, tập hợp $\{x \in K(\alpha,\beta,\lambda,\mu) : \alpha(x) < \lambda\}$ khác rỗng.

Giả sử $A: K \cap \overline{\Omega} \to cc(K)$ (với $\Omega = \{x \in X : \alpha(x) < \lambda\}$) là ánh xạ nửa liên tục trên, compact, thỏa các điều kiện sau:

(i) Với $x \in K(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$ thì $\forall y \in A(x): \alpha(y) < \lambda$,

(ii) Với $x \in K(\alpha, \lambda)$ thì $\forall y \in A(x): \left(\beta(y) < \mu \Rightarrow \alpha(y) < \lambda\right)$.

Khi đó, $i_K(A, \Omega) = 1$.

Chứng minh.

Từ giả thiết ta suy ra Ω là tập mở trong *X* và $K \cap \Omega$ là tập mở, bị chặn trong *K*.

Lấy $u \in \{x \in K(\alpha, \beta, \lambda, \mu) : \alpha(x) < \lambda\}$ thì $u \in K \cap \Omega$.

Ta sẽ chứng minh $t(x-u) \notin A(x) - x$, $\forall t \geq 0, \forall x \in K \cap \partial\Omega$. Giả sử ngược lại, tức là

$$\exists x_0 \in K \cap \partial\Omega, \exists t_0 \geq 0 : t_0(x_0 - u) \in A(x_0) - x_0.$$

Chọn $y_0 \in A(x_0)$ sao cho $t_0(x_0 - u) = y_0 - x_0$, ta có

$$x_0 = \frac{1}{1+t_0} y_0 + \frac{t_0}{1+t_0} u \text{ và } \alpha(x_0) = \lambda \text{ hay } x_0 \in K(\alpha, \lambda).$$

* Nếu $\beta(y_0) \geq \mu$, áp dụng tính chất lõm của hàm số $\beta(x)$, ta có

$$\beta(x_0) \geq \frac{1}{1+t_0} \beta(y_0) + \frac{t_0}{1+t_0} \beta(u) \geq \mu.$$

Vậy $x_0 \in K(\beta, \mu)$ và do đó $x_0 \in K(\alpha, \beta, \lambda, \mu)$. Áp dụng giả thiết (i), ta có

$$\alpha(y_0) < \lambda.$$

Áp dụng tính chất lồi của hàm số $\alpha(x)$, ta được

$$\lambda = \alpha(x_0) \leq \frac{1}{1+t_0} \alpha(y_0) + \frac{t_0}{1+t_0} \alpha(u) < \lambda,$$

là điều vô lí.

* Nếu $\beta(y_0) < \mu$ thì theo (ii) ta có $\alpha(y_0) < \lambda$, do đó

$$\lambda = \alpha(x_0) \leq \frac{1}{1+t_0} \alpha(y_0) + \frac{t_0}{1+t_0} \alpha(u) < \lambda.$$

Ta gặp mâu thuẫn. Vậy ta đã chứng minh được

$$t(x-u) \notin A(x) - x, \forall t \geq 0, \forall x \in K \cap \partial\Omega.$$

Áp dụng Định lí 2.6 ta suy ra $i_K(A, \Omega) = 1$.

Định lí 2.9. Cho (X, K) là không gian Banach có thứ tự, $\alpha : K \to \mathbb{R}$ là hàm số lồi, liên tục, $\beta : K \to \mathbb{R}$ là hàm số lõm, liên tục sao cho tập hợp $\{x \in K : \beta(x) < \mu\}$ khác rỗng và bị chặn, tập hợp $\{x \in K(\alpha, \beta, \lambda, \mu) : \beta(x) > \mu\}$ khác rỗng.

Giả sử $A: K\cap\overline{\Omega}\to cc(K)$ (với $\Omega=\{x\in X:\beta(x)<\mu\}$) là ánh xạ nửa liên tục trên, compact, thỏa các điều kiện sau:

(i) Với $x\in K(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$ thì $\forall y\in A(x):\beta(y)>\mu$,

(ii) Với $x\in K(\beta,\mu)$ thì $\forall y\in A(x):\left(\alpha(y)>\lambda\Rightarrow\beta(y)>\mu\right)$.

Khi đó, $i_K(A,\Omega)=0$.

Chứng minh.

Từ giả thiết ta suy ra Ω là tập mở trong *X* và $K\cap\Omega$ là tập mở, bị chặn trong *K*.

Lấy $u\in\{x\in K(\alpha,\beta,\lambda,\mu):\beta(x)>\mu\}$ thì $u\in K\setminus\overline{\Omega}$.

Ta sẽ chứng minh $t(x-u)\notin A(x)-x$, $\forall t\geq 0,\forall x\in K\cap\partial\Omega$. Giả sử ngược lại, tức là

$$\exists x_0\in K\cap\partial\Omega,\exists t_0\geq 0: t_0(x_0-u)\in A(x_0)-x_0.$$

Chọn $y_0\in A(x_0): t_0(x_0-u)=y_0-x_0$, ta có

$$x_0=\frac{1}{1+t_0}y_0+\frac{t_0}{1+t_0}u \text{ và } \beta(x_0)=\mu \text{ hay } x_0\in K(\beta,\mu).$$

* Nếu $\alpha(y_0)\leq\lambda$, áp dụng tính chất lồi của hàm số $\alpha(x)$, ta có

$$\alpha(x_0)\leq\frac{1}{1+t_0}\alpha(y_0)+\frac{t_0}{1+t_0}\alpha(u)\leq\lambda.$$

Vậy $x_0\in K(\alpha,\lambda)$ và do đó $x_0\in K(\alpha,\beta,\lambda,\mu)$. Do giả thiết (i), ta được

$$\beta(y_0)>\mu.$$

Áp dụng tính chất lõm của hàm số $\beta(x)$, ta được

$$\mu=\beta(x_0)\geq\frac{1}{1+t_0}\beta(y_0)+\frac{t_0}{1+t_0}\beta(u)>\mu,$$

là điều vô lí.

* Nếu $\alpha(y_0)>\lambda$ thì theo (ii) ta có $\beta(y_0)>\mu$, do đó ta có điều vô lí sau

$$\mu=\beta(x_0)\geq\frac{1}{1+t_0}\beta(y_0)+\frac{t_0}{1+t_0}\beta(u)>\mu.$$

Vậy ta đã chứng minh được

$$t(x-u)\notin A(x)-x,\ \forall t\geq 0,\forall x\in K\cap\partial\Omega.$$

Áp dụng Định lí 2.6 ta suy ra $i_K(A,\Omega)=0$.

Định lí 2.10. Giả s(X,K)là không gian Banach có thứ tự, Ω là tập mở, bị chặn. $A: K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact. Khi đó,

(i) Nếu $\theta\in\Omega$ và

$$\lambda x\notin A(x),\ \forall x\in K\cap\partial\Omega,\ \forall\lambda\geq 1,$$

thì $i_K(A,\Omega)=1$.

(ii) Nếu tồn tại phần tử $x_0 \in K\setminus\{\theta\}$ sao cho

$$x \notin A(x)+\lambda x_0\ ,\ \forall x \in K\cap\partial\Omega\ ,\ \forall\lambda \geq 0,$$

thì $i_K(A,\Omega)=0$.

Chứng minh.

(i) Vì $t(x-\theta)\notin A(x)-x$, $\forall t\geq 0$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$ nên điều phải chứng minh suy ra từ Định lí 2.6.

(ii) Khi $\lambda>0$ đủ lớn thì $\lambda x_0 \notin \overline{\Omega}$ và ta sẽ chứng minh tồn tại $\lambda_0>0$ sao cho

$$t(x-\lambda x_0)\notin A(x)-x\ ,\ \forall t\geq 0\ ,\ \forall x\in K\cap\partial\Omega\ ,\ \forall\lambda\geq\lambda_0.$$

Khi đó theo Định lí 2.6 ta có $i_K(A,\Omega)=0$.

Nếu khẳng định nêu trên không đúng thì ta tìm được các dãy $t_n\geq 0, \lambda_n\to\infty, x_n\in K\cap\partial\Omega$, $y_n\in A(x_n)$ sao cho

$$t_n(x_n-\lambda_n x_0)=y_n-x_n \text{ hay } x_n=\frac{1}{1+t_n}y_n+\frac{t_n}{1+t_n}\lambda_n x_0.$$

Vì các dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ bị chặn, ta suy ra dãy $\left\{\dfrac{t_n\lambda_n}{1+t_n}\right\}$ bị chặn và do đó $t_n\to 0$.

Chuyển sang dãy con nếu cần, ta có thể coi

$$y_n\to y_0\ ,\ \frac{t_n}{1+t_n}\lambda_n\to\lambda_0\geq 0,\ x_n\to x_0.$$

Khi đó, ta có $y_0\in A(x_0)$ và

$$x_0=y_0+\lambda_0 x_0 \text{ hay } x_0\in A(x_0)+\lambda_0 x_0.$$

Ta gặp mâu thuẫn.

Định lí 2.11. Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Ω là tập mở, bị chặn. $A: K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact sao cho:

(i) $\inf\limits_{x\in K\cap\partial\Omega} d(\theta, A(x))>0$,

(ii) $\lambda x\notin A(x)$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$, $\forall\lambda\in(0,1]$.

Khi đó, $i_K(A,\Omega)=0$.

Chứng minh.

Xét ánh xạ $H:(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]\to cc(K)$ xác định bởi

$$H(x,s)=(1-s+st)A(x)\ \ (t>1),$$

thì $H(x,s)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact và nhận giá trị lồi, đóng. Vì $t>1$ nên $1-s+st\geq 1$, $\forall s\in[0,1]$ do đó theo (ii) ta suy ra $x\notin H(x,s)$, $\forall(x,s)\in(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]$.

Áp dụng tính chất bất biến đồng luân cho $H(x,s)$ ta được $i_K(A,\Omega)=i_K(tA,\Omega)$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $i_K(tA,\Omega)=0$ với $t>1$ đủ lớn. Cố định $x_0 \in K\setminus\{\theta\}$, ta chứng minh tồn tại $t_0>1$ sao cho

$$\forall t \ge t_0, \forall x \in K\cap\partial\Omega, \forall\lambda \ge 0 : \lambda x_0 \notin x - tA(x). \quad (1)$$

Giả sử ngược lại, khi đó tồn tại các dãy $\{t_n\}\subset\mathbb{R}$, $\{x_n\}\subset K\cap\partial\Omega$, $\{\lambda_n\}\subset\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n=+\infty$, $\lambda_n \ge 0$, $x_n \in K\cap\partial\Omega$, $\lambda_n x_0 \in x_n - t_nA(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra tồn tại $y_n \in A(x_n)$ sao cho

$$\lambda_n x_0 = x_n - t_n y_n\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \quad (2)$$

Vì $\{y_n\}\subset A(K\cap\partial\Omega)$ là tập compact tương đối nên tồn tại dãy con $\{y_{n_k}\}\subset\{y_n\}$ và $y\in K$ sao cho $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k}=y$. Do giả thiết (i) ta có $y\ne\theta$.

Mặt khác, từ (2) suy ra $y_{n_k} \le \frac{1}{t_{n_k}}.x_{n_k}$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Do đó,

$$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = y \le \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{1}{t_{n_k}}.x_{n_k}\right)=\theta,$$

là điều vô lí.

Vậy (1) đúng hay $i_K(tA,\Omega)=0$, $\forall t\ge t_0$. Do đó $i_K(A,\Omega)=0$.

Định lí 2.12. Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Ω là tập mở, bị chặn. $A: K\cap\partial\Omega \to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact và tồn tại ánh xạ $B: K\cap\partial\Omega\to K$ hoàn toàn liên tục và thỏa mãn:

(i) $\inf\limits_{x\in K\cap\partial\Omega}\|B(x)\|>0$,

(ii) $x\notin A(x)+tB(x)$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$, $\forall t\ge 0$.

Khi đó, $i_K(A,\Omega)=0$.

Chứng minh.

Xét ánh xạ $H:(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]\to 2^K\setminus\{\varnothing\}$ xác định bởi

$$H(x,s)=A(x)+(1-s)tB(x)\ \ (t\ge 0).$$

Ta có $H(x,s)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact và nhận giá trị lồi, đóng và do (ii) ta suy ra

$$x\notin H(x,s)\ ,\forall (x,s)\in(K\cap\partial\Omega)\times[0,1].$$

Áp dụng tính chất bất biến đồng luân cho $H(x,s)$ ta được

$$i_K(A,\Omega)=i_K(A+tB,\Omega), \forall t\ge 0.$$

Ta chứng minh $i_K(A+tB,\Omega)=0$ khi *t* đủ lớn. Lấy $x_0\in K\setminus\{\theta\}$, ta sẽ chứng minh

$$x\notin A(x)+tB(x)+\lambda x_0,\ \forall x\in K\cap\partial\Omega,\forall\lambda\ge 0 \text{ và } \forall t\ge 0 \text{ đủ lớn.}$$

Nếu điều này không đúng thì ta tìm được các dãy $x_n\in K\cap\partial\Omega$, $y_n\in A(x_n)$, $t_n\to\infty$, $\lambda_n\ge 0$ sao cho

$$x_n=y_n+t_nB(x_n)+\lambda_n x_0,$$

hay

$$\frac{x_n-y_n}{t_n}=B(x_n)+\frac{\lambda_n}{t_n}x_0. \tag{3}$$

Ta có $\dfrac{x_n-y_n}{t_n}\to\theta$ và có thể coi (nếu cần ta chuyển sang dãy con) $B(x_n)\to y, \dfrac{\lambda_n}{t_n}\to\lambda\ge 0.$

Do điều kiện (i) thì $y\in K\setminus\{\theta\}$, qua giới hạn trong (3) ta được $\theta=y+\lambda x_0$ là điều vô lí.

Định lí 2.13.

i) Giả sử *D* là một *K* – lân cận của x_0, ánh xạ đa trị $A:D\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ có giá trị đóng, bị chặn khả vi Fréchet theo nón *K* tại x_0. Khi đó, nếu *A* là ánh xạ compact thì A'_{x_0} là ánh xạ compact trên *K*.

ii) Giả sử ánh xạ đa trị $A:K\setminus K_r\to 2^Y\setminus\{\varnothing\}$ ($r>0$ đủ lớn) có giá trị đóng, bị chặn khả vi Fréchet theo nón *K* tại ∞. Khi đó, nếu *A* là ánh xạ compact thì A'_∞ là ánh xạ compact trên *K* ở dạng sau: Nếu $\Omega\subset K$ là tập bị chặn và $\inf\limits_{x\in\Omega}\|x\|>0$ thì $A'_\infty(\Omega)$ là tập compact tương đối.

Chứng minh.

Đặt $B=A'_{x_0}$ hoặc $B=A'_\infty$. Giả sử $\Omega\subset K$ là tập bị chặn và $\forall x\in\Omega:\|x\|\le M$ ($\sigma\le\|x\|\le M$, $\forall x\in\Omega$ nếu $B=A'_\infty$), ta chứng minh $B(\Omega)$ là tập compact tương đối trong *Y*.

Giả sử ngược lại, tức là $\exists\{y_n\}\subset B(\Omega)$ và $\varepsilon_0>0$ sao cho $\|y_m-y_n\|\ge M\varepsilon_0 \quad (m\ne n)$.

Vì $y_n\in B(\Omega)=\bigcup\limits_{h\in\Omega}B(h)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên $\exists h_n\in\Omega$ và $\|h_n\|\le M: y_n\in B(h_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

i) Trường hợp $B=A'_{x_0}$.

Vì *B* là đạo hàm theo nón của *A* tại x_0 nên

$$\exists\delta>0,\forall h\in X\left(\|h\|<\delta\Rightarrow d_H\left(A(x_0+h),A(x_0)+B(h)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3}\|h\|\right).$$

Suy ra

$$d_H\left(A\left(x_0+\frac{\delta}{M}h_n\right),A(x_0)+B\left(\frac{\delta}{M}h_n\right)\right)<\frac{\varepsilon_0}{3}.\left\|\frac{\delta}{M}h_n\right\|.$$

Do định nghĩa của d_H, ta có

$$d\left(u, A\left(x_0 + \frac{\delta}{M}h_n\right)\right) < \frac{\delta\varepsilon_0}{3} \ , \forall u \in A(x_0) + \frac{\delta}{M}B\left(h_n\right),$$

hay

$$d\left(y_0 + \frac{\delta}{M}y_n, A\left(x_0 + \frac{\delta}{M}h_n\right)\right) < \frac{\delta\varepsilon_0}{3} \ , \ y_0 \in A(x_0).$$

Từ đây suy ra

$$\exists z_n \in A\left(x_0 + \frac{\delta}{M}h_n\right) : \left\| z_n - \left(y_0 + \frac{\delta}{M}y_n\right)\right\| < \frac{\delta\varepsilon_0}{3}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned}\|z_m - z_n\| &= \left\| z_m - y_0 - \frac{\delta}{M}y_m + \frac{\delta}{M}y_m - \left(z_n - y_0 - \frac{\delta}{M}y_n\right) - \frac{\delta}{M}y_n \right\| \\ &\geq \frac{\delta}{M}.\|y_m - y_n\| - \left\| z_m - y_0 - \frac{\delta}{M}y_m \right\| - \left\| z_n - y_0 - \frac{\delta}{M}y_n \right\| \\ &\geq \frac{\delta}{M}.\varepsilon_0 M - \frac{\delta\varepsilon_0}{3} - \frac{\delta\varepsilon_0}{3} = \frac{\delta\varepsilon_0}{3}.\end{aligned}$$

Ta gặp mâu thuẫn với tính compact của ánh xạ *A*.

ii) Trường hợp $B = A'_\infty$.

Vì *B* là đạo hàm theo nón của *A* tại ∞ nên

$$\exists r > 0, \forall x \in X \left(\|x\| > r\sigma \Rightarrow d_H\left(A(x), B(x)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3M}\|x\| \right).$$

Từ đây suy ra

$$d_H\left(A(rh_n), rB(h_n)\right) = d_H\left(A(rh_n), B(rh_n)\right) < \frac{\varepsilon_0}{3M}\|rh_n\| \leq \frac{r\varepsilon_0}{3}.$$

Do đó

$$d\left(y, A(rh_n)\right) < \frac{r\varepsilon_0}{3} \ , \forall y \in rB(h_n).$$

Do $d\left(ry_n, A(rh_n)\right) < \frac{r\varepsilon_0}{3}$ nên tồn tại $z_n \in A(rh_n) : \|z_n - ry_n\| < \frac{r\varepsilon_0}{3}$.

Khi đó,

$$\begin{aligned}\|z_m - z_n\| &= \left\| z_m - ry_m + ry_m - \left(z_n - ry_n\right) - ry_n \right\| \\ &\geq r.\|y_m - y_n\| - \|z_m - ry_m\| - \|z_n - ry_n\| \\ &\geq r\varepsilon_0 - \frac{r\varepsilon_0}{3} - \frac{r\varepsilon_0}{3} = \frac{r\varepsilon_0}{3}.\end{aligned}$$

Ta gặp mâu thuẫn với tính compact của ánh xạ *A*.

Định lí 2.14.

1) Giả sử $A: K_r \to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact, $A(\theta) = \{\theta\}$ và có đạo hàm theo nón *K* tại θ là A'_θ đồng thời A'_θ không có trong *K* vectơ riêng với giá trị riêng bằng 1. Khi đó,

$$i_K\left(A, B(\theta,\rho)\right) = i_K\left(A'_\theta, B(\theta,\rho)\right) \text{ với } \rho > 0 \text{ đủ nhỏ.}$$

2) Giả sử $A: K \setminus K_r \to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và có đạo hàm theo nón *K* tại ∞ là A'_∞ đồng thời A'_∞ không có trong *K* vectơ riêng với giá trị riêng bằng 1. Khi đó,

$$i_K\left(A, B(\theta,\rho)\right) = i_K\left(A'_\infty, B(\theta,\rho)\right) \text{ với } \rho > 0 \text{ đủ lớn.}$$

Chứng minh.

1) Do Định lí 2.13 thì A'_θ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact và có giá trị lồi, đóng.

Xét ánh xạ đa trị $H: K_r \times [0,1] \to cc(K)$ xác định bởi

$$H(x,t) = tA(x) + (1-t)A'_\theta(x).$$

Ta có *H* là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact. Ta sẽ chứng minh

$$x \notin H(x,t)\ ,\forall t \in [0,1]\,, \forall x \in K \cap \partial B(\theta,\rho) \text{ với } \rho > 0 \text{ đủ nhỏ.}$$

Thật vậy, $\forall t \in [0,1], \forall x \in K \setminus \{\theta\}, \forall y \in A(x), \forall y' \in A'_\theta(x)$, ta có

$$\|x - ty - (1-t)y'\| = \|x - y' - t(y - y')\| \ge \|x - y'\| - t\|y - y'\| \ge \|x - y'\| - \|y - y'\|. \tag{4}$$

Đầu tiên ta sẽ chứng minh

$$\exists a > 0 : d\left(x, A'_\theta(x)\right) \ge a\|x\|, \forall x \in K \setminus \{\theta\}. \tag{5}$$

Nếu điều này không đúng, ta có

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in K \setminus \{\theta\} : d\left(x_n, A'_\theta(x_n)\right) < \frac{1}{n}\|x_n\|.$$

Đặt $y_n = \dfrac{x_n}{\|x_n\|}$ thì $\|y_n\| = 1$ và $d\left(y_n, A'_\theta(y_n)\right) < \dfrac{1}{n}$ $,\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó tồn tại $z_n \in A'_\theta(y_n)$ sao cho $\|y_n - z_n\| < \dfrac{1}{n}$ $,\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vì A'_θ là ánh xạ compact nên ta có thể giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in K$ và do đó $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$.

Mà A'_θ là ánh xạ nửa liên tục trên nên suy ra $z \in A'_\theta(z)$ là điều vô lí.

Vậy (5) đúng và do đó

$$\|x - y'\| \ge a\|x\|\ , \forall x \in K \setminus \{\theta\}, \forall y' \in A'_\theta(x). \tag{6}$$

Mặt khác, với $y \in A(x)$, $y' \in A'_\theta(x)$, ta có

$$\|y-y'\| \le d\left(y, A'_\theta(x)\right) + d\left(A(x), A'_\theta(x)\right) + d\left(y', A(x)\right)$$
$$\le \sup_{y\in A(x)} d\left(y, A'_\theta(x)\right) + \sup_{y'\in A'_\theta(x)} d\left(y', A(x)\right) + d\left(A(x), A'_\theta(x)\right)$$
$$\le d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right) + d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right) + d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right) = 3d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right). \quad (7)$$

Từ (4), (6), (7) ta có

$$\frac{\|x-ty-(1-t)y'\|}{\|x\|} \ge a - \frac{3d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right)}{\|x\|}.$$

Mà $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0\\ x\in K}} \dfrac{d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right)}{\|x\|} = 0$ nên ta tìm được $\rho > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$a - \frac{3d_H\left(A(x), A'_\theta(x)\right)}{\|x\|} > 0,\ \forall x \in K\setminus\{\theta\}, \|x\| \le \rho.$$

Vậy ta đã chứng minh được $x \notin H(x,t)$, $\forall t\in[0,1]$, $\forall x \in K \cap \partial B(\theta,\rho)$.

Áp dụng tính chất bất biến đồng luân của bậc tôpô ta được

$i_K\left(A, B(\theta,\rho)\right) = i_K\left(A'_\theta, B(\theta,\rho)\right)$ với $\rho > 0$ đủ nhỏ.

2) Chứng minh tương tự như trên ta cũng có

$i_K\left(A, B(\theta,\rho)\right) = i_K\left(A'_\infty, B(\theta,\rho)\right)$ với $\rho > 0$ đủ lớn.

3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một số kết quả mới về bậc tôpô của ánh xạ đa trị tác động trong không gian Banach có thứ tự. Các kết quả này dễ áp dụng trong nghiên cứu các bao hàm thức vi phân thường và đạo hàm riêng và sẽ được chúng tôi trình bày trong các bài báo tiếp theo.

Theo đánh giá của chúng tôi, với việc ứng dụng ngày càng rộng rãi các ánh xạ đa trị trong khoa học, kinh tế… thì hướng sử dụng bậc tôpô trong nghiên cứu ánh xạ đa trị sẽ càng được các nhà toán học quan tâm.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Borisovich, Y. G., Gelman, B. D., Myshkis, A. D., & Obukhovskii, V. V. (2011). *Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions.* Moscow: Librokom.

De Blasi, F. S. (1976). On The Differentiability of Multifunctions. *Pacific Jounal of Mathematic, 66*(1), 67-82.

Deimling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis.* Berlin: Springer.

Fitzpatrick, P. M., & Petryshyn, W. V. (1975). Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in cones. *J.London Math. Soc.*, *12*(2-12), 75-85.

Guo, D., & Lakshmikantham, V. (1988). *Nonlinear Problems in Abstract Cone.* San Diego: Academic Press.

Nguyen, B. H., Tran, T. B., & Vo, V. T. (2018). The monotone minoraut method and eigenvalue problem for multivalued operators in cones. *Fixed Point Theory*, *19*(1), 275-286.

O'Regan, D., & Agarwal, R. (2000). A note on the of multiple fixed points for multivalued maps with applications. *J.Differ.Eq*, *160*, 389-403.

O'Regan, D., & Zima, M. (2007). Leggett-Williams norm-type fixed point theorems for multivalued mappings. *Appl.Math.Comput*, *187*, 1238-1249.

O'Regan, D., Cho, Y., & Chen, Y. (2006). *Topological Degree Theory and applications.* New York

Vo, V. T. (2016). *Some classes of equations in an ordered Banach space.* Doctoral Thesis.

FIXED POINT INDEX FOR SOME CLASSES OF MULTIVALUED MAPPINGS IN ORDERED BANACH SPACES

Nguyen Bich Huy[1], Nguyen Dang Quang[2*]

[1]Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

[2]FPT University – Ho Chi Minh City, Vietnam

[*]Corresponding author: Nguyen Dang Quang – Email: quangnd32@fe.edu.vn

Received: July 22, 2022; Revised: August 12, 2022; Accepted: August 20, 2022

ABSTRACT

The fixed point index theory for multivalued mappings in ordered Banach spaces developed by many mathematicians in the 1970s has provided a new and effective tool in studying differential inclusions and partial derivatives. In this paper, from the general properties of the fixed point index for multivalued mappings in cones, we deduce new results on computing this index, which are easily applied in concrete problems. Partially, we prove that the derivative of a compact upper semi-continuous multivalued mapping A with convex closed values is a compact mapping, and the fixed point index of A can be computed by the index of its derivative.

Keywords: compact upper semi-continuous multivalued mappings; cone; fixed point index; order relations