TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 19, Số 8 (2022): 1371-1386

Vol. 19, No. 8 (2022): 1371-1386

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3560(2022)

Bài báo nghiên cứu

NGHIỆM TRONG NÓN CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ VÀ ỨNG DỤNG CHO BAO HÀM THỨC VI PHÂN VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN NHIỀU ĐIỂM

Nguyễn Đăng Quang

Trường Đại học FPT – Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Đăng Quang – Email: quangnd32@fe.edu.vn

Ngày nhận bài: 08-8-2022; ngày nhận bài sửa: 23-8-2022; ngày duyệt đăng: 25-8-2022

TÓM TẮT

Lí thuyết bậc tôpô cho các ánh xạ đa trị trong các không gian Banach có thứ tự đã cung cấp một công cụ mới, hiệu quả trong nghiên cứu các bao hàm thức vi phân và bài toán giá trị riêng của ánh xạ đa trị. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng công cụ bậc tôpô theo nón để chứng minh các định lí tổng quát về tồn tại nghiệm trong nón của các bao hàm thức $x \in A(x)$, $\lambda x \in A(x)$ *cho một số lớp ánh xạ đa trị A tác động trong không gian có thứ tự. Chúng tôi cũng nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi* $\mu \to \infty$. *Các kết quả này sau đó được chúng tôi áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm dương của bao hàm thức vi phân cấp hai* $-x''(t) \in f\left(t, x(t)\right)$, $t \in [0,1]$ *với điều kiện kiện biên nhiều điểm dạng* $x(0) = u(x)$, $x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x(\beta_i)$. *Các kết quả thu được trong bài báo đã mở rộng một số nghiên cứu đã có trong trường hợp phương trình lên trường hợp bao hàm thức.*

Từ khóa: giá trị riêng; bậc tôpô, bao hàm thức vi phân cấp hai; điều kiện biên nhiều điểm; ánh xạ đa trị, nghiệm trong nón

1. Giới thiệu

Bậc tôpô của ánh xạ là công cụ hữu hiệu để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm của các phương trình phi tuyến trừu tượng và phương trình vi phân cụ thể (Deimling, 1985; Guo & Lakshmikantham, 1988; (O'Regan, Cho, & Chen, 2006). Với việc sử dụng ngày càng rộng rãi các ánh xạ đa trị trong Toán học, khoa học tự nhiên, kinh tế…, lí thuyết bậc tôpô cho ánh xạ đa trị đã được xây dựng và ứng dụng trong nghiên cứu các bao hàm thức vi phân, bài toán giá trị riêng của các ánh xạ đa trị (Nguyen, Tran, & Vo, 2018). Việc tìm các định lí tổng quát mới về điểm bất động của ánh xạ đa trị để có thể áp dụng vào các bài toán mới, vẫn sẽ được tiếp tục trong thời gian tới.

Trong bài báo này, dựa trên các tính chất tổng quát về bậc tôpô của ánh xạ đa trị tác động trong không gian có thứ tự, chúng tôi sẽ chứng minh các định lí về sự tồn tại điểm bất

---

Cite this article as: Nguyen Dang Quang (2022). Solutions in cones of multivalued operators and application to a differential inclusion with multipoint boundary conditions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(8), 1371-1386.

động trong nón, vectơ riêng trong nón của một số lớp ánh xạ đa trị. Các định lí tổng quát được chúng tôi áp dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm dương của của bao hàm thức vi phân cấp hai với điều kiện biên nhiều điểm, kết quả này mở rộng các nghiên cứu của (Le, Le, & Nguyen, 2008) lên trường hợp đa trị.

2. Các khái niệm được sử dụng và kết quả chính

2.1. Bậc tôpô của ánh xạ đa trị trong không gian có thứ tự

Giả sử *X* là không gian Banach trên trường số thực. Tập $K \subset X$ được gọi là nón trong *X* nếu:

(i) *K* là tập đóng trong *X*,

(ii) $K + K \subset K$, $\lambda K \subset K$, $\forall \lambda \geq 0$,

(iii) $K \cap (-K) = \{\theta\}$.

Nếu *K* là nón thì thứ tự trong *X* sinh bởi *K* được xác định bởi $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$ Khi đó ta nói cặp (*X*, *K*) là không gian Banach có thứ tự.

Định nghĩa 2.1. (Jahn & Truong, 2011)

Cho (X, K) là không gian Banach có thứ tự, *A* và *B* là các tập con khác rỗng của *X*. Ta xây dựng quan hệ $"\overset{(k)}{\leq}"$ $(k = 1, 2, 3)$ giữa hai tập hợp *A*, *B* và khái niệm ánh xạ đa trị (*k*) – tăng như sau:

1) $A \overset{(1)}{\leq} B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \exists y \in B : x \leq y)$ (nghĩa là $A \subset B - K$),

2) $A \overset{(2)}{\leq} B \Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A : x \leq y)$ (nghĩa là $B \subset A + K$),

3) $A \overset{(3)}{\leq} B \Leftrightarrow (\forall x \in A, \forall y \in B : x \leq y)$ (nghĩa là $B \subset x + K , \forall x \in K$).

Ánh xạ đa trị $F : D \subset X \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$,

F gọi là (*k*) – tăng ($k = 1, 2, 3$) nếu $\forall x, y \in D \left(x \leq y \Rightarrow F(x) \overset{(k)}{\leq} F(y) \right)$.

Các quan hệ giữa 2 tập hợp vừa nêu đã được nhiều nhà toán học giới thiệu và sử dụng. Các quan hệ này sẽ trùng với quan hệ thứ tự sinh bởi nón *K* nếu các tập hợp *A*, *B* chỉ có một phần tử.

Định nghĩa 2.2. (Deimling, 1985)

Cho X, Y là các không gian Banach trên trường số thực và ánh xạ đa trị $F : D \subset X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$.

(i) *F* được gọi là nửa liên tục trên trong *D* nếu với mọi tập hợp *V* mở trong *Y* thì tập hợp $F^+(V) = \{x \in D : F(x) \subset V\}$ mở trong *D*.

(ii) F là ánh xạ compact nếu $F(S)=\bigcup_{x\in S}F(x)$ là tập compact tương đối trong Y, với S là tập bị chặn bất kì trong D.

(iii) Với $E\subset Y$, ta kí hiệu $cc(E)$ là tập các tập con lồi, đóng, khác rỗng trong E.

Định nghĩa 2.3. (Borisovich et al., 2011; Fitzpatrick & Petryshyn, 1975)

Cho Ω là tập mở, bị chặn trong không gian Banach X với thứ tự sinh bởi nón K và $A: K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact sao cho $x\notin A(x)$, với mọi $x\in K\cap\partial\Omega$ (ta nói A không suy biến trên $K\cap\partial\Omega$). Khi đó tồn tại ánh xạ đơn trị, compact $f: K\cap\partial\Omega\to K$ đồng luân với A trên $K\cap\partial\Omega$, nghĩa là tồn tại ánh xạ đa trị $G:\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1]\to cc(K)$ là nửa liên tục trên, compact sao cho

$$x\notin G(x,t),\ \forall(x,t)\in\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1];\ G(.,1)=A,\ G(.,0)=f.$$

Ta định nghĩa bậc tôpô $i_K(A,\Omega)$ theo nón K của ánh xạ A trên tập Ω, bởi

$$i_K(A,\Omega)=i_K(f,\Omega),$$

trong đó $i_K(f,\Omega)$ là bậc tôpô theo nón K của ánh xạ đơn trị f trên tập Ω.

Mệnh đề 2.4. (Borisovich et al., 2011)

Giả sử $\left(X,K\right)$ là không gian Banach có thứ tự $\Omega\subset X$ là tập mở, bị chặn. Trong các tính chất 1 – 3, ta giả sử ánh xạ A xác định trên $K\cap\partial\Omega$, còn trong các tính chất 4 – 5, ta giả sử ánh xạ A xác định trên $K\cap\overline{\Omega}$, nhận giá trị trong $cc(K)$ và là nửa liên tục trên, compact.

1. Tính chất chuẩn hóa

Nếu $A(x)\equiv C$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$ trong đó $C\subset K$ là tập lồi, compact thì

$$i_K(A,\Omega)=\begin{cases}1 \text{ khi } C\subset K\cap\Omega,\\ 0 \text{ khi } C\subset K\setminus\overline{\Omega}.\end{cases}$$

2. Tính chất bất biến qua đồng luân

Nếu $H:\left(K\cap\partial\Omega\right)\times[0,1]\to cc(K)$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và không suy biến thì

$$i_K\left(H(.,1),\Omega\right)=i_K\left(H(.,0),\Omega\right).$$

3. Tính chất Poincare

Giả sử $A_1: K\cap\partial\Omega\to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact không suy biến trên $K\cap\partial\Omega$ và thỏa mãn

$$\frac{x-y}{\|x-y\|}\neq-\frac{x-z}{\|x-z\|},$$

với mọi $y\in A(x)$, $z\in A_1(x)$, $x\in K\cap\partial\Omega$. Khi đó, $i_K(A,\Omega)=i_K(A_1,\Omega)$.

4. Tính chất cộng tính

Giả sử Ω_1, Ω_2 là các tập mở không giao nhau. Nếu $x \notin A(x)$, với mọi $x \in K \cap \left(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)\right)$ thì

$i_K(A,\Omega) = i_K(A,\Omega_1) + i_K(A,\Omega_2)$.

5. Nếu $i_K(A,\Omega) \neq 0$ thì A có điểm bất động trong Ω.

Mệnh đề 2.5. (Infante & Pietramala, 2009)

Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Ω là tập mở, bị chặn. $A: K \cap \partial\Omega \to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact. Khi đó,

1. Nếu $\theta \in \Omega$ và

$$\lambda x \notin A(x)\ ,\ \forall x \in K \cap \partial\Omega\ ,\ \forall \lambda \geq 1,$$

thì $i_K(A,\Omega) = 1$.

2. Nếu tồn tại phần tử $x_0 \in K \setminus \{\theta\}$ sao cho

$x \notin A(x) + \lambda x_0$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega$, $\forall \lambda \geq 0$,

thì $i_K(A,\Omega) = 0$.

3. Nếu A thỏa mãn

(i) $\inf\limits_{x \in K \cap \partial\Omega} \|A(x)\|_2 > 0$ (với $\|A(x)\|_2 = \inf\limits_{y \in A(x)} \|y\|$),

(ii) $\lambda x \notin A(x)$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega$, $\forall \lambda \in (0,1]$,

thì $i_K(A,\Omega) = 0$.

2.2. Các định lí điểm bất động của ánh xạ đa trị

Định lí 2.6.

Cho (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Ω_1, Ω_2 là các tập mở, bị chặn trong X và $\theta \in \Omega_1, \overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ và $A: K \cap \overline{\Omega}_2 \to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact. Giả sử một trong hai điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i) $\|A(x)\|_1 \leq \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ và $\|A(x)\|_2 \geq \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$,

(ii) $\|A(x)\|_2 \geq \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_1$ và $\|A(x)\|_1 \leq \|x\|$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$,

với $\|A(x)\|_1 = \sup\limits_{y \in A(x)} \|y\|$, $\|A(x)\|_2 = \inf\limits_{y \in A(x)} \|y\|$.

Khi đó A có điểm bất động trong $K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$.

Chứng minh

Ta chứng minh định lí trong trường hợp điều kiện (i) thỏa mãn, trường hợp (ii) được chứng minh tương tự.

Giả sử ánh xạ A không có điểm bất động trên $K \cap \partial\Omega_1$ và $K \cap \partial\Omega_2$. Ta sẽ chứng minh

$\lambda x \notin A(x)$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega$, $\forall \lambda \geq 1$. (1)

Giả sử ngược lại, tức là tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega_1$, $\lambda_0 \geq 1$ sao cho $\lambda_0 x_0 \in A(x_0)$.

Khi đó , $|\lambda_0|.\|x_0\| \leq \|A(x_0)\|_1$. Mặt khác, từ giả thiết ta suy ra $\lambda_0 \neq 1$ nên

$$\|A(x_0)\|_1 \geq |\lambda_0|.\|x_0\| > \|x_0\|,$$

là điều vô lí.

Vậy (1) đúng và do đó $i_K(A,\Omega_1) = 1$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh điều kiện (i) và (ii) của tính chất 3 trong Mệnh đề 2.5 thỏa mãn. Vì Ω_2 là tập mở chứa θ nên $\theta \notin \partial\Omega_2$ suy ra $\inf\limits_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|A(x)\|_2 \geq \inf\limits_{x \in K \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0$ hay điều kiện (i) đúng. Sau cùng ta chứng minh điều kiện (ii) cũng đúng, tức là chứng minh

$\lambda x \notin A(x)$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega_2$, $\forall \lambda \in (0,1]$.

Giả sử ngược lại, tức là tồn tại $x_0 \in K \cap \partial\Omega_2$, $0 < \lambda_0 \leq 1$ sao cho $\lambda_0 x_0 \in A(x_0)$.

Khi đó, $|\lambda_0|.\|x_0\| \geq \|A(x_0)\|_2$. Mặt khác, từ giả thiết ta suy ra $\lambda_0 \neq 1$ nên $\|A(x_0)\|_2 \leq |\lambda_0|.\|x_0\| < \|x_0\|$ là điều vô lí.

Vậy điều kiện (ii) đúng. Suy ra $i_K(A,\Omega_2) = 0$. Áp dụng tính chất cộng tính của bậc tôpô ta được $i_K(A,\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) = i_K(A,\Omega_2) - i_K(A,\Omega_1) = 0 - 1 = -1 \neq 0$.

Suy ra tồn tại $x_0 \in K \cap \left(\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1\right)$ sao cho $x_0 \in A(x_0)$ (đpcm).

Hai định lí tiếp theo khẳng định sự tồn tại của giá trị riêng dương và vectơ riêng dương của ánh xạ đa trị.

Định lí 2.7.

Giả sử (X,K) là không gian Banach có thứ tự, Ω là tập mở, bị chặn và chứa θ, $A: K \cap \partial\Omega \to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact $\inf\limits_{x \in K \cap \partial\Omega} \|A(x)\|_2 > 0$. Khi đó,

$\exists x_0 \in K \cap \partial\Omega$, $\exists \mu_0 > 0 : \mu_0 x_0 \in A(x_0)$.

Chứng minh.

Đặt $m = \sup\limits_{x \in K \cap \partial\Omega} \|x\|$, $\beta = \inf\limits_{x \in K \cap \partial\Omega} \|A(x)\|_2$. Chọn $\alpha > \dfrac{m}{\beta}$, ta chứng minh ánh xạ αA thỏa mãn điều kiện của tính chất 3 trong Mệnh đề 2.5. Hiển nhiên điều kiện (i) đúng, tiếp theo ta chứng minh

$\mu x \notin \alpha A(x)$, $\forall x \in K \cap \partial\Omega$, $\forall \mu \in (0,1]$.

Giả sử ngược lại, tức là

$\exists x_1 \in K \cap \partial\Omega$, $\exists \mu_1 \in (0,1] : \mu_1 x_1 \in \alpha A(x_1)$.

Khi đó $\mu_1 \geq \dfrac{\alpha}{\|x_1\|} \|A(x_1)\|_2 \geq \dfrac{\alpha\beta}{m} > 1$, là điều vô lí.

Do đó theo Mệnh đề 2.5. ta suy ra $i_K(\alpha A,\Omega)=0$.

Ánh xạ $H:(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]\to cc(K)$ xác định bởi $H(x,t)=t\alpha A(x)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact. Nếu $x\notin H(x,t)$,$\forall(x,t)\in(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]$ thì áp dụng tính chất bất biến đồng luân của bậc tôpô ta được $i_K(\alpha A,\Omega)=i_K(\hat{\theta},\Omega)=1$ (trong đó $\hat{\theta}:K\cap\overline{\Omega}\to cc(K)$ là ánh xạ không $\hat{\theta}(x)=\{\theta\}$, $\forall x\in K\cap\partial\Omega$). Ta gặp mâu thuẫn.

Vậy tồn tại $(x_0,t_0)\in(K\cap\partial\Omega)\times[0,1]$ sao cho $x_0\in H(x_0,t_0)=t_0\alpha A(x_0)$. Hiển nhiên $t_0\neq 0$ và đặt $\mu_0=(\alpha t_0)^{-1}>0$ thì $\mu_0 x_0\in A(x_0)$ (đpcm).

Định lí 2.8. Cho (X,K) là không gian Banach có thứ tự. $A:K\to cc(K)$ là ánh xạ nửa liên tục trên, compact, $A(\theta)=\{\theta\}$ và một trong hai điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i) $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0\\ x\in K}}\dfrac{\|A(x)\|_1}{\|x\|}=0$, $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in K}}\dfrac{\|A(x)\|_2}{\|x\|}=+\infty$,

(ii) $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0\\ x\in K}}\dfrac{\|A(x)\|_2}{\|x\|}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to+\infty\\ x\in K}}\dfrac{\|A(x)\|_1}{\|x\|}=0$.

Khi đó,

(a) $\forall\mu>0,\exists x_\mu>\theta:\mu x_\mu\in A(x_\mu)$,

(b) $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\|x_\mu\|=+\infty$ (nếu có điều kiện (i)) và $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\|x_\mu\|=0$ (nếu có điều kiện (ii)).

Chứng minh.

Ta chứng minh định lí trong trường hợp điều kiện (i) thỏa mãn, trường hợp (ii) được chứng minh tương tự.

Cho trước $\mu>0$, thì do điều kiện (i) suy ra tồn tại các số $R>r>0$ sao cho

$\|A(x)\|_1<\mu\|x\|$; $\forall x\in K,\|x\|=r$,

$\|A(x)\|_2>\mu\|x\|$; $\forall x\in K,\|x\|=R$.

Đặt $\Omega_r=\{x\in X:\|x\|<r\}$, $\Omega_R=\{x\in X:\|x\|<R\}$ thì Ω_r,Ω_R là các tập mở bị chặn trong X và $\theta\in\Omega_r,\overline{\Omega}_r\subset\Omega_R$. Khi đó, ánh xạ đa trị $\dfrac{1}{\mu}A$ thỏa điều kiện (i) của Định lí 2.6. Do đó, tồn tại $x_\mu\in\overline{\Omega}_R\setminus\Omega_r$ hay $x_\mu>\theta$ sao cho $x_\mu\in\dfrac{1}{\mu}A(x_\mu)$ hay $\mu x_\mu\in A(x_\mu)$.

Tiếp theo ta chứng minh $\lim\limits_{\mu\to+\infty}\|x_\mu\| = +\infty$. Giả sử ngược lại, tức là tồn tại số thực $c > 0$ và dãy số thực $\{\mu_n\}_n$ sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_n = +\infty$ và $\|x_{\mu_n}\| \le c$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chuyển sang dãy con nếu cần, ta có thể coi $\lim\limits_{n\to+\infty}\|x_{\mu_n}\| = \tau \ge 0$.

Khi đó,

$$\mu_n \le \frac{\|A(x_{\mu_n})\|_1}{\|x_{\mu_n}\|} \le \frac{M}{\|x_{\mu_n}\|} \text{ (với } M = \sup_{\|x\|\le c}\|A(x)\|_1). \tag{2}$$

Do bất đẳng thức thứ nhất trong (2) và điều kiện (i) cùng với $\mu_n \to \infty$, ta suy ra $\tau \ne 0$. Nhưng khi đó, do bất đẳng thức thứ hai ta lại gặp mâu thuẫn.

2.3. Bao hàm thức vi phân cấp hai với điều kiện biên nhiều điểm

Xét bài toán

$$\begin{cases} -x''(t) \in f\left(t, x(t)\right),\ 0 \le t \le 1, \\ x(0) = u(x),\ x(1) = \sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i x(\beta_i) \quad (m \ge 3). \end{cases} \tag{3}$$

với các giả thiết như sau

+ $f : [0,1]\times\mathbb{R}_+ \to cc(\mathbb{R}_+)$ là ánh xạ đa trị compact và là hàm Caratheodory trên theo nghĩa:

- a1) $\forall x \in \mathbb{R}_+$, hàm $t \mapsto f(t,x)$ là hàm số đo được, nghĩa là $\forall y \in \mathbb{R}$, hàm số

$D(t) = \inf\left\{|y - z|, z \in f(t,x)\right\}$ đo được.

- a2) Hàm số $x \mapsto f(t,x)$ nửa liên tục trên hkn trên $[0,1]$.
- a3) $\forall r > 0, \exists \varphi_r \in L^1\left([0,1]\right) : \sup\limits_{0\le x\le r} f(t,x) \le \varphi_r(t)$ hkn trên $[0,1]$.

+ $u : K \to \mathbb{R}_+$ là hàm số liên tục, xác định bởi $u(x) = \int\limits_0^1 x^\alpha(s)ds \ \ (0 < \alpha \ne 1)$,

trong đó $K = \left\{x \in C\left([0,1]\right) : x(t) \ge 0, \forall t \in [0,1]\right\}$ là nón trong $C\left([0,1]\right)$,

+ $\alpha_i \ge 0\ (i = 1,2,...,m-2)$ và $\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i < 1$,

+ $0 < \beta_1 < \beta_2 < ..... < \beta_{m-2} < 1$ và $\sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\beta_i < 1$,

+ $A = 1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i\beta_i$, $B = 1 - \sum\limits_{i=1}^{m-2}\alpha_i$, $D = \dfrac{A - B + 1}{A}$.

Ta định nghĩa

+ $C_\varepsilon = \min\left\{1 - \dfrac{B}{A}\left(\dfrac{1}{2} + \varepsilon\right), \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{1}{2} - \varepsilon\right)\right\} > 0$ với $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ cố định,

+ $K_\varepsilon = \left\{ x \in K : \min\limits_{\frac{1}{2}-\varepsilon \le t \le \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \ge C_\varepsilon \|x\| \right\}$, $\|x\| = \max\limits_{0\le t\le 1} |x(t)|$ là chuẩn trong $C([0,1])$.

Bài toán (3) được viết lại dưới dạng sau:

$$x(t) \in \frac{A-Bt}{A} u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s) f(s,x(s))ds, \qquad (4)$$

trong đó

$$\overline{G}(t,s) = G(t,s) + \frac{t}{1-\sum\limits_{i=1}^{m-2} \alpha_i \beta_i} \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i G(\beta_i, s),$$

với $G(t,s) = \begin{cases} s(1-t), & 0 \le s \le t \le 1, \\ t(1-s), & 0 \le t \le s \le 1. \end{cases}$

Với mỗi $x \in K$, ta kí hiệu

$$F_x = \left\{ y \in L^1([0,1]) : y(t) \in f(t,x(t)) \text{ hkn trên } [0,1] \right\},$$

và lập ánh xạ $T : K \to 2^K \setminus \{\varnothing\}$ xác định bởi

$$T(x) = \left\{ h \in K : \exists y \in F_x,\ h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s) y(s)ds, \forall t \in [0,1] \right\},$$

với $\gamma(t) = \dfrac{A-Bt}{A}, t \in [0,1]$.

Bổ đề 2.9. (Guo & Lakshmikantham, 1988)

i) $0 < \gamma(t) \le 1, \forall t \in [0,1]$,

ii) Hàm số $\overline{G}(t,s)$ liên tục trên $[0,1]\times[0,1]$ và $0 \le \overline{G}(t,s) \le Ds(1-s), \forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$,

iii) Với $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, $\overline{G}(t,s) \ge \left(\dfrac{1}{2} - \varepsilon\right) s(1-s)$, $\forall s \in [0,1], \forall t \in \left[\dfrac{1}{2}-\varepsilon, \dfrac{1}{2}+\varepsilon\right]$,

iv) $\forall \tau \in [0,1]$, $\lim\limits_{t\to\tau} \int_0^1 \left|\overline{G}(t,s) - \overline{G}(\tau,s)\right| \varphi_r(s)ds = 0$, $\forall r > 0$.

Bổ đề 2.10. (Lasota & Opial, 1965)

Giả sử $I \subset \mathbb{R}$ là đoạn bị chặn, $f : I \times \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}} \setminus \{\varnothing\}$ là ánh xạ Caratheodory trên có giá trị lồi, compact sao cho $F_x = \left\{ y \in L^1(I) : y(t) \in f(t,x(t)) \text{ hkn trên } I \right\} \ne \varnothing, \forall x \in C(I)$. Khi đó, nếu $L : L^1(I) \to C(I)$ là ánh xạ tuyến tính liên tục thì ánh xạ đa trị $L \circ F_x, x \mapsto L(F_x)$ có đồ thị đóng trong $C(I) \times C(I)$.

Bổ đề 2.11. Ánh xạ T là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, compact và có giá trị lồi, đóng.

Chứng minh

1) $T(K_{\varepsilon}) \subset K_{\varepsilon}$

Với $x \in K,\ h \in T(x)$ tồn tại $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1]$$

$$\leq u(x) + D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

Suy ra $\|h\| \leq u(x) + D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds$.

Mặt khác, với $\frac{1}{2} - \varepsilon \leq t \leq \frac{1}{2} + \varepsilon$, ta có

$$h(t) \geq \left[1 - \frac{B}{A}\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)\right]u(x) + \frac{1}{D}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds$$

$$\geq C_{\varepsilon}\left(u(x) + D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds\right) \geq C_{\varepsilon}\|h\|.$$

Vậy $h \in K_{\varepsilon}$ và do đó $T(K_{\varepsilon}) = \bigcup_{x \in K_{\varepsilon}} T(x) \subset K_{\varepsilon}$.

2) *T* có giá trị lồi

$x \in K,\ h_1, h_2 \in T(x),\ \lambda \in (0,1)$ tồn tại $y_1, y_2 \in F_x$ sao cho

$$h_k(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y_k(s)ds, \forall t \in [0,1],\ k = 1,2.$$

Khi đó

$$\lambda h_1(t) + (1-\lambda)h_2(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)\left[\lambda y_1(s) + (1-\lambda)y_2(s)\right]ds, \forall t \in [0,1].$$

Vì F_x là tập lồi nên $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in F_x$. Suy ra $\lambda h_1 + (1-\lambda)h_2 \in T(x)$.

3) *T* có giá trị đóng

Giả sử $x \in K$ và $\{u_n\} \subset T(x)$, $u_n \to u$ và $\{y_n\}_n \subset F_x$ sao cho

$$u_n(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y_n(s)ds, \forall t \in [0,1]. \quad (5)$$

Với $r = \|x\| + 1$ và theo giả thiết (a3), tồn tại $\varphi_r \in L([0,1])$ thỏa mãn

$\sup_{0 \leq x \leq r} f(t,x) \leq \varphi_r(t)$ hkn trên [0,1].

Do $\{y_n\}_n \subset F_x$ nên $y_n(t) \in f(t, x(t))$ và ta có

$0 \leq y_n(t) \leq \varphi_r(t),\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Áp dụng hệ quả của định lí Dunford – Pettis ta suy ra tồn tại dãy con $\left\{y_{n_k}\right\}_k \subset \{y_n\}_n$ và $y \in L([0,1])$ sao cho $y_{n_k} \xrightarrow{w} y$. Vì F_x lồi, đóng nên đóng yếu, do đó $y \in F_x$.

Qua giới hạn trong (5), ta được

$$u(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

Vậy $u \in T(x)$.

4) *T* là ánh xạ compact

Ta sẽ chứng minh với mỗi $r > 0$, tập hợp $T\left(\overline{K_r}\right)$ là tập compact tương đối.

Theo giả thiết (a3), tồn tại $\varphi_r \in L([0,1]): \sup\limits_{0 \le x \le r} f(t,x) \le \varphi_r(t)$ hkn trên [0,1].

- $T\left(\overline{K_r}\right)$ bị chặn đều

Với $x \in \overline{K_r}$ và $h \in T(x)$ có $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1]$$

$$\le \int_0^1 x^\alpha(s)ds + D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds \le r^\alpha + D\int_0^1 s(1-s)\varphi_r(s)ds.$$

- $T\left(\overline{K_r}\right)$ đồng liên tục

Giả sử $t_1, t_2 \in [0,1]$ và $t_1 < t_2$. Ta có

$$h(t_1) - h(t_2) = \left[\gamma(t_1) - \gamma(t_2)\right]u(x) + \int_0^1 \left[\overline{G}(t_1,s) - \overline{G}(t_2,s)\right]y(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

$$= \frac{B}{A}(t_2 - t_1)u(x) + \int_0^1 \left[\overline{G}(t_1,s) - \overline{G}(t_2,s)\right]y(s)ds.$$

Do đó,

$$|h(t_1) - h(t_2)| \le \frac{B}{A}|t_1 - t_2| r^\alpha + \int_0^1 \left|\overline{G}(t_1,s) - \overline{G}(t_2,s)\right|\varphi_r(s)ds.$$

Suy ra $\lim\limits_{t_1 \to t_2} |h(t_1) - h(t_2)| = 0$ (Bổ đề 2.9).

Áp dụng Định lí Ascoli – Arzela ta suy ra *T* là ánh xạ compact.

5) Ánh xạ *T* có đồ thị là tập đóng

Giả sử $x_n, x \in K$ và $x_n \to x$, $h_n \in T(x_n), \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $h_n \to h$. Ta sẽ chứng minh $h \in T(x)$.

Ánh xạ $L: L^1([0,1]) \to C([0,1])$, $w \mapsto \int_0^1 \overline{G}(t,s)w(s)ds$ là ánh xạ tuyến tính, liên tục nên suy ra ánh xạ đa trị $L \circ F: C([0,1]) \to cc(C([0,1]))$ có đồ thị đóng trong $C([0,1]) \times C([0,1])$ (Bổ đề 2.10).

Vì $h_n - \gamma u(x_n) \in L \circ F_{x_n}$ và $h_n - \gamma u(x_n) \to h - \gamma u(x)$ nên $h - \gamma u(x) \in L \circ F_x$ hay $h \in T(x)$.

Vì T là ánh xạ compact và có đồ thị đóng nên T là ánh xạ nửa liên tục trên.

Định lí 2.12. Giả sử tồn tại các số thực R, σ sao cho $0 < \alpha < 1 < R < \sigma$ hoặc $0 < R < 1 < \alpha < \sigma$

và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

1) $f(t,x) \overset{(1)}{\le} \dfrac{4\left(R - R^\alpha\right)}{D}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in [0,R]$,

2) $f(t,x) \overset{(2)}{\ge} \dfrac{2048}{27C_{1/8}} x$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall x \in [\sigma,\infty)$.

Khi đó, bài toán (4) có nghiệm không tầm thường.

Chứng minh.

Giả sử $x \in K, \|x\| = R$ và $h \in T(x)$, ta chọn $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

Vì $y(t) \in f(t, x(t))$ nên $y(t) \le \dfrac{4\left(R - R^\alpha\right)}{D}$. Do đó,

$$h(t) \le \|x\|^\alpha + D\int_0^1 \frac{4\left(R - R^\alpha\right)}{D} s(1-s)ds \le R^\alpha + \int_0^1 \left(R - R^\alpha\right)ds = R = \|x\|.$$

Suy ra

$$\|T(x)\|_1 = \sup_{h \in T(x)} \|h\| \le \|x\|, \forall x \in K, \|x\| = R. \tag{6}$$

Với $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, ta đặt $R_\varepsilon = \max\left\{2R, \sigma C_\varepsilon^{-1}\right\} > 0$ thì $R_\varepsilon > R$, và với $x \in K_\varepsilon, \|x\| = R_\varepsilon$, ta có

$$\min_{\frac{1}{2}-\varepsilon \le t \le \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \ge C_\varepsilon \|x\| = C_\varepsilon R_\varepsilon \ge \sigma.$$

Mặt khác, với $h \in T(x)$, tồn tại $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

$$\geq \int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \overline{G}(t,s)y(s)ds \geq \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} s(1-s)y(s)ds \text{ , } \forall t \in \left[\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon\right].$$

Vì $y(t) \in f(t, x(t))$ nên $y(t) \geq \dfrac{2048}{27C_{1/8}} x(t)$ (do 2)). Do đó

$$h(t) \geq \frac{2048}{27C_{1/8}}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} s(1-s)x(s)ds \geq \frac{2048}{27C_{1/8}} C_\varepsilon \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\|x\|\int_{\frac{1}{2}-\varepsilon}^{\frac{1}{2}+\varepsilon} s(1-s)ds .$$

Chú ý rằng $s(1-s) \geq \left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)^2$, $\forall s \in \left[\dfrac{1}{2}-\varepsilon, \dfrac{1}{2}+\varepsilon\right]$, ta có

$$h(t) \geq \frac{2048}{27C_{1/8}} C_\varepsilon \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)^3 2\varepsilon\|x\|. \tag{7}$$

Dễ thấy, hàm số $\varphi(\varepsilon) = \left(\dfrac{1}{2}-\varepsilon\right)^3 2\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$ đạt GTLN tại $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{8}$ và $\varphi(\varepsilon_0) = \dfrac{27}{2048}$.

Do đó, nếu ta chọn $\varepsilon = \varepsilon_0 = \dfrac{1}{8}$ trong (7) thì ta có

$$\|T(x)\|_2 = \inf_{h\in T(x)} \|h\| \geq \|x\| \text{ , } \forall x \in K_{\varepsilon_0} \text{ , } \|x\| = R_{\varepsilon_0} . \tag{8}$$

Từ (6), (8) và $T(K_\varepsilon) \subset K_\varepsilon$, áp dụng Định lí 2.6 với K_{ε_0}, $\Omega_R = \left\{x \in C([0,1]) : \|x\| < R\right\}$, $\Omega_{R_{\varepsilon_0}} = \left\{x \in C([0,1]) : \|x\| < R_{\varepsilon_0}\right\}$, ta suy ra tồn tại $x^* \in K_{\varepsilon_0} \cap \left(\overline{\Omega}_{R_{\varepsilon_0}} \setminus \Omega_R\right) : x^* \in T\left(x^*\right)$ hay bài toán (4) có nghiệm không tầm thường.

Định lí 2.13. 1) Giả sử ánh xạ đa trị f là (3) – tăng theo *x*, tức là

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_+ : x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(t, x_1) \overset{(3)}{\leq} f(t, x_2) \text{ , } \forall t \in [0,1].$$

2) Tồn tại 2 số thực R_1, R_2 sao cho $0 < \alpha < 1 < R_1 < R_2$ hoặc $0 < R_1 < R_2 < 1 < \alpha$ và thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(i) $f(s, R_2) \overset{(1)}{\leq} \dfrac{4\left(R_2 - R_2^\alpha\right)}{D}$, $\forall s \in [0,1]$,

(ii) $f(s, C_\varepsilon R_1) \overset{(2)}{\geq} \dfrac{2048}{27} R_1$, $\forall s \in [0,1]$.

Khi đó, bài toán (4) có 2 nghiệm dương x_1^*, x_2^* thỏa mãn:

$R_1 \leq \|x_1^*\| \leq R_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_1^*$,

$R_1 \leq \|x_2^*\| \leq R_2$, $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = x_2^*$, với $x_{n+1}\in T(x_n),\forall n\in\mathbb{N}$ và $x_0(t)=R_1,\forall t\in[0,1]$, $\hat{x}_{n+1}\in T(\hat{x}_n),\forall n\in\mathbb{N}$ và $x_1(t)=R_2$, $\forall t\in[0,1]$.

Chứng minh.

Ta định nghĩa $K_{[R_1,R_2]}=\{x\in K_\varepsilon : R_1\le\|x\|\le R_2\}$.

Lấy $x\in K_{[R_1,R_2]}$ tùy ý và $\forall h\in T(x)$. Tương tự Định lí 2.12, ta chứng minh được

$$R_1\le\|h\|\le R_2.$$

Vậy $T\left(K_{[R_1,R_2]}\right)=\bigcup_{x\in K_{[R_1,R_2]}} T(x)\subset K_{[R_1,R_2]}$.

Đặt $x_0(t)=R_2,\forall t\in[0,1]$ thì $x_0\in K_{[R_1,R_2]}$. Ta xây dựng dãy $\{x_n\}_n$ thỏa mãn $x_{n+1}\in T(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dãy $\{x_n\}_n$ bị chặn, do đó $T\left(\{x_n\}_n\right)$ là tập compact tương đối.

Mà $x_{n+1}\in T(x_n),\forall n\in\mathbb{N}$ nên tồn tại dãy con $\{x_{n_k}\}_k\subset\{x_n\}_n$ và $x_1^*\in K_{[R_1,R_2]}$ sao cho

$$\lim_{k\to\infty}x_{n_k}=x_1^*. \tag{9}$$

Mặt khác, ta có $0\le x_1(t)\le\|x_1\|\le R_2=x_0(t),\forall t\in[0,1]$ nên $f(s,x_1(s))\overset{(3)}{\le} f(s,x_0(s))$.

Do đó $T(x_1)\overset{(3)}{\le}T(x_0)$ hay $x_2\le x_1$. Bằng quy nạp ta chứng minh được

$$x_{n+1}\le x_n,\forall n\in\mathbb{N}. \tag{10}$$

Từ (9) và (10) suy ra $\lim_{n\to\infty}x_n=x_1^*$. Mà T là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên có giá trị đóng và $x_{n+1}\in T(x_n),\forall n\in\mathbb{N}$ nên $x_1^*\in T(x_1^*)$.

Đặt $\hat{x}_0(t)=R_1,\forall t\in[0,1]$ thì $\hat{x}_0\in K_{[R_1,R_2]}$. Ta xây dựng dãy $\{\hat{x}_n\}_n$ thỏa mãn $\hat{x}_{n+1}\in T(\hat{x}_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Dễ thấy $\hat{x}_n\in K_{[R_1,R_2]}$, $\hat{x}_n\le\hat{x}_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Lí luận tương tự trường hợp trên suy ra tồn tại $x_2^*\in K_{[R_1,R_2]}$ sao cho $\lim_{n\to\infty}\hat{x}_n=x_2^*$ và $x_2^*\in T(x_2^*)$.

Định lí 2.14. Giả sử tồn tại các số thực $\mu,\eta>0$ thỏa mãn

$$f(t,x)\overset{(2)}{\ge}\mu x\ ,\forall t\in[0,1],\ \forall x\in[\eta,\infty).$$

Khi đó tồn tại số $\delta>0$ sao cho

$$\forall R>\delta,\exists x_R\in K,\|x_R\|=R,\ \exists\mu_R>0:\mu_R x_R\in T(x_R).$$

Chứng minh.

Lấy $\varepsilon\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ và đặt $\delta=\eta C_\varepsilon^{-1}>0$. Với $R>\delta$, đặt $\Omega_R=\{x:\|x\|<R\}$.

Với $x \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_R$, ta có $\min\limits_{\frac{1}{2}-\varepsilon \le t \le \frac{1}{2}+\varepsilon} x(t) \ge C_\varepsilon \|x\| = C_\varepsilon R > C_\varepsilon \delta = \eta$ nên $f(t, x(t)) \overset{(2)}{\ge} \mu x(t)$.

Do đó, nếu $h \in T(x)$ và $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

thì do $y(t) \in f(t, x(t))$ nên $y(t) \ge \mu x(t)$.

Lí luận tương tự như trong chứng minh Định lí 2.12, ta có

$$h(t) \ge \mu C_\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^3 2\varepsilon R.$$

Do đó

$$\inf_{x \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_R} \|T(x)\|_2 \ge 2\varepsilon R \mu C_\varepsilon \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^3 > 0.$$

Áp dụng Định lí 2.7, suy ra tồn tại $x_R \in K_\varepsilon \cap \partial\Omega_R, \mu_R > 0$ sao cho $\mu_R x_R \in T(x_R)$.

Định lí 2.15. Giả sử tồn tại các số thực $0 < p < q$ thỏa mãn

$$px^\alpha \overset{(2)}{\le} f(t, x) \overset{(1)}{\le} qx^\alpha, \forall t \in [0,1], \ \forall x \in [0, \infty).$$

Khi đó,

(a) $\forall \mu > 0, \exists x_\mu > \theta : \mu x_\mu \in T(x_\mu)$,

(b) $\lim\limits_{\mu \to \infty} \|x_\mu\| = \infty$ nếu $\alpha > 1$, $\lim\limits_{\mu \to \infty} \|x_\mu\| = 0$ nếu $0 < \alpha < 1$.

Chứng minh.

Giả sử $x \in K \setminus \{\theta\}$ và $h \in T(x)$, khi đó tồn tại $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

$$h(t) \le \int_0^1 x^\alpha(s)ds + D\int_0^1 s(1-s)y(s)ds, \ \forall t \in [0,1].$$

Vì $y(t) \in f(t, x(t))$ nên $y(t) \le qx^\alpha(t)$. Do đó,

$$\frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|} \le \left(1 + \frac{Dq}{4}\right)\|x\|^{\alpha-1}. \tag{11}$$

Lấy $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Giả sử $x \in K_\varepsilon \setminus \{\theta\}$, $h \in T(x)$, $y \in F_x$ sao cho

$$h(t) = \gamma(t)u(x) + \int_0^1 \overline{G}(t,s)y(s)ds, \forall t \in [0,1].$$

Vì $y(t) \in f(t, x(t))$ nên $y(t) \geq px^{\alpha}(t)$. Do đó, Lí luận tương tự Định lí 2.12, ta có

$$h(t) \geq 2\varepsilon p C_{\varepsilon}^{\alpha} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^3 \|x\|^{\alpha}.$$

Do đó

$$\frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|} \geq 2\varepsilon p C_{\varepsilon}^{\alpha} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)^3 \|x\|^{\alpha-1}. \tag{12}$$

Từ (11), (12) ta suy ra

- $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0 \\ x\in K_{\varepsilon}}} \frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|} = 0$ và $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to \infty \\ x\in K_{\varepsilon}}} \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|} = \infty$ nếu $\alpha > 1$,
- $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to \infty \\ x\in K_{\varepsilon}}} \frac{\|T(x)\|_1}{\|x\|} = 0$ và $\lim\limits_{\substack{\|x\|\to 0 \\ x\in K_{\varepsilon}}} \frac{\|T(x)\|_2}{\|x\|} = \infty$ nếu $0 < \alpha < 1$.

Áp dụng Định lí 2.8 ta thu được các kết luận của Định lí 2.15.

3. Kết luận

Trong nghiên cứu này, chúng tôi thu được các định lí tổng quát về sự tồn tại điểm bất động trong nón, vectơ riêng trong nón cho một số lớp ánh xạ đa trị tác động trong không gian có thứ tự. Các kết quả này được áp dụng để chứng minh sự tồn tại nghiệm dương của một số lớp bao hàm thức vi phân cấp hai với điều kiện biên nhiều điểm.

Trong lí thuyết điểm bất động của ánh xạ đa trị và ứng dụng còn nhiều hướng nghiên cứu hứa hẹn những kết quả thú vị. Tiếp theo chúng tôi sẽ nghiên cứu sự tồn tại các điểm bất động trong nón của các ánh xạ đa trị có giá trị không lồi, ví dụ lớp ánh xạ dạng $P \circ F$ với F là ánh xạ đa trị có giá trị lồi và P là ánh xạ đơn trị phi tuyến, và tìm ứng dụng vào các bao hàm thức đạo hàm riêng.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Borisovich, Y., Gelman, B., Myshkis, A., & Obukhovskii, V. (2011). *Introduction to the Theory of Multivalued Maps and Differential Inclusions.* Moscow: LIBROKOM.

Deimling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis.* Berlin: Springer.

Fitzpatrick, P., & Petryshyn, W. (1975). Fixed point theorems and the fixed point index for multivalued mappings in cones. *J.London Math. Soc., 12*(2-12), 75-85.

Guo, D., & Lakshmikantham, V. (1988). *Nonlinear Problems in Abstract Cone.* San Diego: Academic Press.

Guo, Y., Wang, Y., & Yu, C. (2007). Positive solutions of m-point boundary value problems for second order differential equations with an advanced argument. *Eighth ACIS International Conference on Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking, and Parallel/Distributed Computing*, 770-773.

Infante, G., & Pietramala, P. (2009). Perturbed Hammerstein integral inclusions with solutions that change sign. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 50,* 591-605.

Jahn, J., & Truong, X. D. H. (2011). New Order Relations in Set Optimization. *J Optim Theory Appl 148*, 209-236.

Lasota, A., & Opial, Z. (1965). An application of the Kakutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations. *Bull. Acad. Polon. Sci. S´er. Sci. Math. Astronom. Phys. 13,* 781-786.

Le, X. T., Le, T. P. N., & Nguyen, T. L. (2008). Positive Solutions For An m-Point Boundary-Value Problem. *Electronic Journal of Differential Equations, 2008*(111), 1-11.

Nguyen, B. H., Tran, T. B., & Vo, V. T. (2018). The monotone minoraut method and eigenvalue problem for multivalued operators in cones. *Fixed Point Theory, 19*(1), 275-286.

O'Regan, D., & Agarwal, R. (2000). A note on the of multiple fixed points for multivalued maps with applications. *J.Differ.Eq, 160*, 389-403.

O'Regan, D., & Zima, M. (2007). Leggett-Williams norm-type fixed point theorems for multivalued mappings. *Appl.Math.Comput, 187,* 1238-1249.

O'Regan, D., Cho, Y., & Chen, Y. (2006). *Topological Degree Theory and applications.* New York

---

SOLUTIONS IN CONES OF MULTIVALUED OPERATORS AND APPLICATION TO A DIFFERENTIAL INCLUSION WITH MULTIPOINT BOUNDARY CONDITIONS

Nguyen Dang Quang

FPT University – Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Dang Quang – Email: quangnd32@fe.edu.vn

Received: August 08, 2022; Revised: August 08, 2022; Accepted: August 25, 2022

ABSTRACT

The fixed point index theory for multivalued mappings in ordered Banach spaces has provided a new and effective tool in studying the differential and eigenvalue problems of multivalued mappings. In this paper, we use the fixed point index to prove the general theorems about the existence of solutions in cones of the inclusions $x \in A(x)$, $\lambda x \in A(x)$ *for some multivalued mapping classes A acting in ordered spaces. We also study the asymptotic behavior of the solution when* $\mu \to \infty$. *These results are applied in studying positive solutions of the second-order differential inclusion* $-x''(t) \in f\left(t, x(t)\right)$, $t \in [0,1]$ *with multipoint boundary conditions* $x(0) = u(x)$, $x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i x(\beta_i)$. *The results obtained in the paper have extended some existing studies in the case of equations to the case involving the inclusions.*

Keywords: eigenvalues; fixed point index; inclusions second-order differential; multipoint boundary conditions; multivalued mapping, solutions in cones