

Bài báo nghiên cứu

KHẢO SÁT MỘT SỐ ĐẶC TÍNH CỦA SLINKY BẰNG MÔ HÌNH RỜI RẠC HÓA

*Trình Đại Hoàng Long, Nguyễn Lâm Duy**

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

**Tác giả liên hệ: Nguyễn Lâm Duy – Email: duynl@hcmue.edu.vn*

Ngày nhận bài: 12-3-2023; ngày nhận bài sửa: 08-4-2023 ; ngày duyệt đăng: 17-4-2023

TÓM TẮT

Một lò xo mềm, hay một slinky, được treo tại đầu trên và để dẫn ra dưới tác dụng của trọng lực theo phương thẳng đứng. Khi cân bằng, ta thả rơi phần đầu trên của slinky. Việc quan sát quá trình rơi cho thấy các vòng phía dưới của lò xo hoàn toàn đứng yên cho tới khi nó va chạm với các vòng bên trên. Dựa vào những kiến thức cơ bản của cơ học đại cương và giải tích, bài viết này xây dựng các biểu thức tính từ mô hình rời rạc nhằm giải thích và mô tả định lượng một số thuộc tính vật lý đặc trưng liên quan đến slinky như độ biến dạng, vị trí khối tâm, và thời gian rơi. Vì vậy, bài toán khảo sát slinky rơi tự do có thể được tiếp cận dễ dàng, rộng rãi hơn đối với sinh viên chuyên ngành vật lý và những người đam mê vật lý nói chung.

Từ khóa: khối tâm; rơi tự do; lò xo slinky

1. Giới thiệu

Slinky là một loại lò xo mềm có các vòng quấn sát vào nhau ở trạng thái tự nhiên mà không cần có ngoại lực nén từ bên ngoài. Ta xét một chiếc slinky được treo thẳng đứng và bị dẫn dưới tác dụng của trọng lực. Khi trạng thái cân bằng được thiết lập, ta thả phần được treo (phần đầu ở phía trên) để nó rơi tự do. Hiện tượng quan sát được là phần đáy của lò xo đứng yên hoàn toàn cho đến khi va chạm với các vòng ở bên trên rơi xuống. Hiệu ứng lơ lửng này đã được nghiên cứu trong nhiều công trình (Aguirregabiria et al., 2007; Calkin, 1993; Cross & Wheatland, 2012; Graham, 2001; Newburgh & Andes, 1995; Vanderbei, 2017; Unruh, 2011). Các nghiên cứu trên đã được xây dựng dựa trên nhiều cơ sở lý thuyết, từ phương pháp xấp xỉ Taylor (Graham, 2001) đến vận dụng giả thuyết sóng biến dạng lan truyền dọc theo slinky (Aguirregabiria et al., 2007; Calkin, 1993; Cross & Wheatland, 2012; Unruh, 2011), là điều được chỉ ra trong hai nghiên cứu về lò xo trước đó (Edwards & Hultsch, 1972; Heard & Newby, 1977). Các nghiên cứu trên đã mô tả tương đối tốt chuyển động của slinky và đã đưa ra lời giải thích dựa trên quan điểm lan truyền “thông tin” của sự thả rơi dưới dạng sóng đàn hồi.

Cite this article as: Trình Đại Hoàng Long, & Nguyễn Lâm Duy (2023). Characteristics of a slinky via a discrete model. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 20(7), 1199-1206.

Tuy nhiên, sinh viên chuyên ngành vật lí hay những người yêu thích vật lí ở nhiều mức độ nói chung khó có một am hiểu tường tận về hiện tượng này nếu không có một nền tảng vững chắc về giải tích cùng các kiến thức đặc thù của dao động và sóng. Vì thế, vùng đối tượng độc giả có thể tìm được câu trả lời xác đáng cho mình về hiện tượng vật lí thú vị này còn tương đối hạn chế. Bài viết này nhằm xây dựng một số biểu thức toán học nhằm giải thích hiện tượng được trình bày, mô tả trạng thái cân bằng tĩnh theo phương thẳng đứng của slinky và tìm thời gian rơi của nó. Các biểu thức này được xây dựng dựa trên một ý tưởng quen thuộc trong vật lí và giải tích, và đã được vận dụng để nghiên cứu các đặc tính của lò xo (Newburgh & Andes, 1995; Vanderbei, 2017; Sawicki, 2002; Mak, 1987; Edwards & Hulstsch, 1972): chia slinky thành nhiều phần tử nhỏ ghép nối tiếp nhau rồi sau đó ta có thể thực hiện phép liên tục hóa để mô tả một chiếc slinky thật. Khi sử dụng mô hình này, ta chỉ cần áp dụng các kiến thức về cơ học đại cương và giải tích đơn biến cơ bản. Vì vậy, nó có thể phù hợp với sinh viên chuyên ngành vật lí và nhiều người yêu thích vật lí nói chung. Đồng thời, mô hình có thể giúp ta tìm ra câu trả lời chính xác, ngắn gọn hơn cho vấn đề được nghiên cứu.

2. Nội dung

2.1. Giải thích hiện tượng lơ lửng của lò xo

2.1.1. Mô hình rời rạc hóa của lò xo

Trước tiên, ta xét một slinky có các tham số đặc trưng: khối lượng M , độ cứng k , tổng số vòng C , và mỗi vòng được rời rạc hóa thành Ω lò xo ghép nối tiếp với nhau. Vì thế, cả slinky được rời rạc hóa thành $N = C\Omega$ lò xo nhỏ ghép nối tiếp. Mỗi lò xo có độ cứng là Nk và có chiều dài tự nhiên bằng 0. Khi slinky đạt trạng thái cân bằng tĩnh, ta chiếu nó lên một trục Ox thẳng đứng thành một chuỗi các lò xo thẳng đứng nhỏ ghép nối tiếp nhau. Ở mỗi đầu trên của N chiếc lò xo này là một phần tử khối lượng. Mỗi phần tử này có khối lượng $\Delta m = M/N$, và có bề dày là d_0/N , với d_0 là chiều dài của slinky ở trạng thái tự nhiên. Mô hình được trình bày như Hình 1.

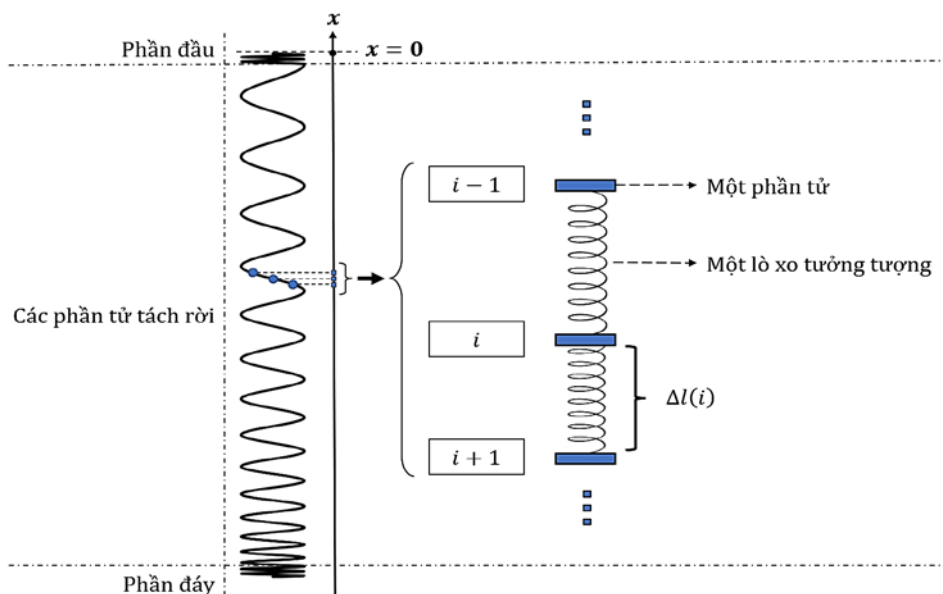
Vì slinky là một lò xo có các vòng quấn sát vào nhau ở trạng thái tự nhiên và cần một lực tối thiểu F_{min} để tách hai vòng kề nhau (hoặc hai phần tử) ra khỏi nhau, nên ở đáy của slinky có thể có n phần tử không tách rời nhau (Mak, 1987). Đó là vì tổng trọng lượng của các phần tử này vừa đúng bằng F_{min} . Ta đặt $z = (N - n)/N$ là một hệ số đặc trưng cho tỉ lệ số phần tử được tách rời trên tổng số phần tử. Ví dụ với $z = 0.9$ có nghĩa là 10% số phần tử của lò xo bị dính với nhau ở phần đáy của nó.

Ta đánh số các phần tử theo chỉ số chạy i , có giá trị từ 1 đến N , tương ứng với phần tử đầu tiên ở phía trên đến phần tử cuối cùng ở dưới. Khi cân bằng, lực của lò xo giữa phần tử thứ i và phần tử thứ $i + 1$ có độ lớn bằng trọng lượng của $N - i$ phần tử. Gọi độ biến dạng của lò xo dưới phần tử i khi cân bằng là $\Delta l(i)$. Dựa vào định luật Hooke và điều kiện cân bằng của phần tử thứ $i + 1$, ta có:

$$Nk\Delta l(i) + F_{min} = (N - i)\Delta mg,$$

với $F_{min} = n\Delta mg$, ta suy ra biểu thức cho $\Delta l(i)$:

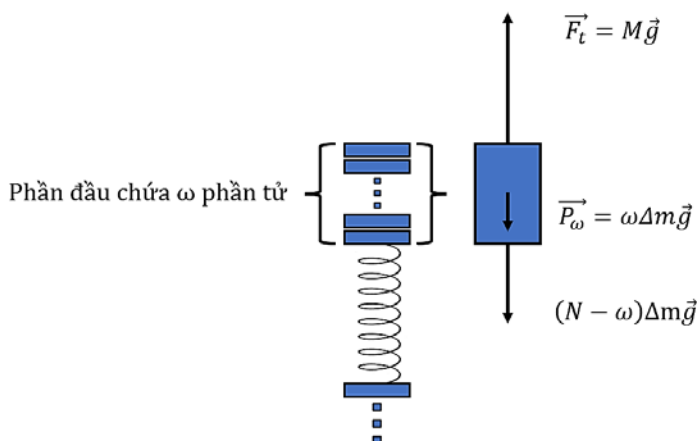
$$\Delta l(i) = \left(\frac{zN-i}{N^2}\right) \frac{Mg}{k}. \tag{1}$$



Hình 1. Mô hình rời rạc của slinky

2.1.2. Giải thích hiện tượng lơ lửng của lò xo

Ta giả sử ban đầu có tổng cộng ω phần tử được cột dính vào nhau ở phần treo phía trên slinky. Điều này là hợp lí khi xem xét cách mà nó thường được treo hoặc cầm trong thực tế. Ở trạng thái cân bằng, các lực tác dụng lên khối gồm ω phần tử này (nằm ở đầu phía trên) bao gồm: trọng lượng của chính nó $P_\omega = \omega\Delta mg$, lực của lò xo ngay dưới nó, và lực của giá treo F_t . Lực của lò xo này có độ lớn đúng bằng trọng lượng của tất cả các phần tử ở phía dưới, bởi vì phần tử tiếp theo cũng ở trạng thái cân bằng. Như vậy, thành phần hướng xuống của hợp lực tác dụng lên phần đầu có giá trị bằng trọng lượng của cả slinky (Hình 2).

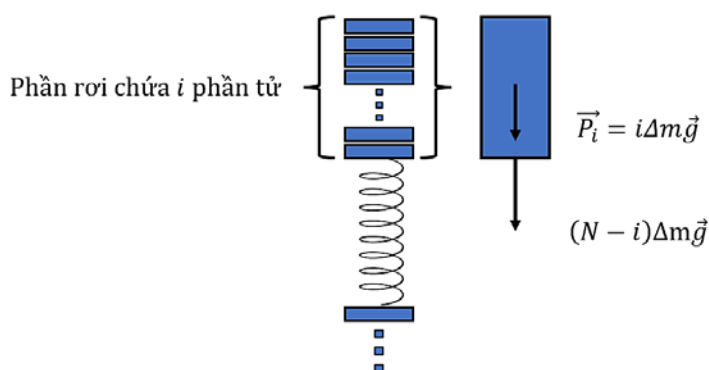


Hình 2. Giản đồ lực của phần đầu trong trạng thái cân bằng

Hợp lực tác dụng lên mỗi phần tử còn lại gồm 3 thành phần: trọng lượng của phần tử đó, lực của lò xo bên dưới nó và lực của lò xo bên trên nó. Ở trạng thái cân bằng, các hợp lực này bằng 0 cho từng phần tử của slinky. Ngay khi được thả rơi, lực của giá treo mất tác dụng. Hợp lực tác dụng lên phần đầu lúc này hướng xuống và có độ lớn bằng bằng trọng lượng của cả slinky. Vì vậy, đồng thời, các phần tử còn lại của slinky đều có hợp lực bằng 0, tức là chúng vẫn đứng yên và chưa có chuyển động. Lập luận này có sự tương đồng với ý tưởng được trình bày trong một nghiên cứu định tính về hiện tượng này (Newburgh & Andes, 1995). Tuy nhiên, sau khi phần đầu phía trên rơi được một khoảng thời gian nào đó, thì lực của lò xo đầu tiên không giữ nguyên độ lớn ban đầu nữa, mà có độ lớn giảm dần vì khoảng cách (cũng chính là độ biến dạng đàn hồi) giảm dần khi phần đầu rơi. Điều này có nghĩa là các phần tử khác sẽ bắt đầu có gia tốc. Như vậy hiện tượng lơ lửng vẫn chưa được giải thích xác đáng.

Dựa vào Phương trình 1, ta thấy độ biến dạng khi cân bằng của các lò xo tiến đến 0 khi số lượng các phần tử tiến đến vô cùng, tức là lò xo được liên tục hóa, tương đương với một lò xo thật. Vì vậy, sẽ hợp lí nếu ta cho rằng vì các khoảng cách là vô cùng bé, thời gian để phần đầu rơi, sau đó va chạm với phần tử thứ $\omega + 1$ cũng là vô cùng bé. Vì vậy, gia tốc không có thời gian đáng kể để thay đổi. Khi đó, ta có thể xem độ lớn của lực đàn hồi tác dụng lên phần đầu cho đến khi nó va chạm với phần tử phía dưới là không đổi. Do đó, các phần tử khác sẽ đứng yên cho đến khi cú va chạm đầu tiên xảy ra.

Giả sử các va chạm là tuyệt đối mềm và xuyên tâm, phần đầu và phần tử tiếp theo tạo nên phần rơi có khối lượng và vận tốc ngay sau cú rơi tuân theo định luật bảo toàn động lượng. Bây giờ ta lặp lại lập luận trên cho phần rơi mới được hình thành này và thấy rằng hợp lực tác dụng lên nó luôn có giá trị bằng trọng lượng của cả slinky (Hình 3). Lời giải thích có thể được đưa ra ở đây là: các phần tử sẽ không bắt đầu chuyển động cho đến khi được xác nhập vào phần ở phía trên rơi xuống, vì tổng hợp lực tác dụng lên chúng luôn bằng không.



Hình 3. *Giản đồ lực của phần rơi chứa i phần tử*

2.2. Độ biến dạng của slinky và thời gian rơi

2.2.1. Vận dụng mô hình rời rạc

Ta đặt một biên số mới $\varphi = zN - \omega + 1$ là số phần tử mà lò xo bên dưới chúng có độ biến dạng lớn hơn hoặc bằng không, tức là giá trị $\Delta l(i)$ của chúng không âm. Để tìm vị trí của khối tâm, ta chọn trục Ox thẳng đứng hướng lên, với $x = 0$ là vị trí của mép trên cùng ở thời điểm ban đầu của slinky như Hình 1. Vị trí của mỗi phần tử $x(i)$ phụ thuộc vào phân khúc của lò xo chứa phần tử ấy. Với phần đầu ($1 \leq i \leq \omega$):

$$|x_1(i)| = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{d_0}{N};$$

đối với phần lò xo bị dãn ($\omega < i \leq zN$):

$$|x_2(i)| = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{d_0}{N} + \sum_{j=\omega}^{i-1} \Delta l(j) = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{d_0}{N} + \frac{Mg}{kN^2} \sum_{j=\omega}^{i-1} (zN - j);$$

và với phần không tách rời ở đáy lò xo ($zN < i \leq N$):

$$|x_3(i)| = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{d_0}{N} + \Delta L,$$

với ΔL là tổng độ dãn của các lò xo phần tử nằm giữa khối bị treo ở trên và khối dính nhau ở đầu dưới slinky.

Đặt $i' = i - \omega + 1$ là số thứ tự của một phần tử kể từ $\omega - 1$ phần tử đầu tiên (phần tử thứ ω có $i' = 1$), ta có thể tính toán dễ dàng hơn giá trị tổng trong biểu thức của $|x_2(i)|$:

$$\sum_{j=\omega}^{i-1} (zN - j) = \sum_{j'=1}^{i'-1} (\varphi - j') = \left[\frac{-i'^2}{2} + \left(\varphi + \frac{1}{2}\right) i' - \varphi \right]. \tag{2}$$

Ta thu được giá trị của ΔL khi thay $i' = \varphi$ vào biểu thức trên. Khi đó tổng độ dãn của slinky là:

$$\Delta L = \frac{Mg}{kN^2} \sum_{j'=1}^{\varphi-1} (\varphi - j') = \frac{Mg}{kN^2} \left(\frac{\varphi^2 - \varphi}{2} \right),$$

Gọi tổng chiều dài của slinky là $L = d_0 + \Delta L$. Kết quả này phù hợp với tính toán của Sawicki (Sawicki, 2002) trong trường hợp $\omega = 1$, hay $\varphi = zN$. Vậy biểu thức của $|x_3(i)|$ là

$$|x_3(i)| = \left(i - \frac{1}{2}\right) \frac{d_0}{N} + \frac{Mg}{kN^2} \left(\frac{\varphi^2 - \varphi}{2} \right).$$

Như vậy khoảng cách từ vị trí $x = 0$ đến khối tâm là

$$\begin{aligned} |x_c| &= \frac{d_0}{N^2} \sum_{i=1}^N \left(i - \frac{1}{2}\right) + \frac{Mg}{kN^3} \left\{ \sum_{i'=1}^{\varphi} \left[-\frac{i'^2}{2} + \left(\varphi + \frac{1}{2}\right) i' - \varphi \right] + \sum_{i=zN+1}^N \left(\frac{\varphi^2 - \varphi}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{d_0}{2} + \frac{Mg}{k} \left[\frac{\varphi^3}{3N^3} + \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{1-z}{N^2} - \frac{1}{N^3} \right) + \varphi \left(\frac{1}{6N^3} - \frac{1-z}{2N^2} \right) \right]. \tag{3} \end{aligned}$$

Bây giờ ta có thể tìm thời gian slinky hoàn tất cú rơi thông qua quãng đường rơi tự do của khối tâm. Khi slinky hoàn tất cú rơi, và vì các vòng đáy đứng yên, khối tâm sẽ có tọa độ

$d_0/2$ cao hơn tọa độ đáy của slinky. Vậy quãng đường mà slinky rơi là

$$H = d_0 + \Delta L - d_0/2 - |x_c| = \frac{Mg}{k} \left[\frac{-\varphi^3}{3N^3} + \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{z}{N^2} + \frac{1}{N^3} \right) - \varphi \left(\frac{1}{6N^3} + \frac{z}{2N^2} \right) \right].$$

Ta có thể tính được thời gian slinky rơi thông qua công thức rơi tự do quen thuộc

$$t_c = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2M}{k} \left[\frac{-\varphi^3}{3N^3} + \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{z}{N^2} + \frac{1}{N^3} \right) - \varphi \left(\frac{1}{6N^3} + \frac{z}{2N^2} \right) \right]}. \quad (4)$$

2.2.2. So sánh với kết quả thực nghiệm

Ta sử dụng Phương trình 2 và Phương trình 4 để so sánh tổng độ dài L , thời gian rơi t_c với kết quả đo đạc được từ thực nghiệm đối với hai slinky thật (A và B), và với kết quả tính toán cho một slinky C, dựa trên lý thuyết của Calkin (Calkin, 1993). Đây cũng chính là cơ sở của mô hình thời gian va chạm hữu hạn (Cross & Wheatland, 2012). Các giá trị thông số đặc trưng của 3 chiếc slinky được trích từ bài viết của Cross và Wheatland (Cross & Wheatland, 2012) được trình bày ở Bảng 1. Trong đó, độ rời rạc được chọn là $\Omega = 5000$ phần tử/vòng.

Bảng 1. So sánh kết của mô hình trong bài viết này với kết quả đo đạc

Slinky			A	B	C
Các thông số được đo đạc (A và B) và tự chọn (C), được trình bày trong bài viết của Cross và Wheatland (Cross & Wheatland, 2012)					
Khối lượng	M	(g)	215,5	48,7	200
Độ cứng	K	(N/m)	0,69	0,22	0,84
Bề dày tự nhiên	d_0	(cm)	5,8	6,6	6,0
Tổng số vòng	C	(vòng)	86	39	80
Số vòng không dính chùm ở đáy	z	(%)	89	100	90
Tổng độ dài	L	(m)	1,26	1,14	1,005
Thời gian rơi	t_c	(s)	0,27	0,27	0,24
Các kết quả tính toán dựa trên mô hình của bài viết này					
Số vòng dính với phần tử đầu tiên	$(\omega - 1)/C$	(vòng)	1,25	1,25	0,00
Tổng độ dài	L	(m)	1,23	1,08	1,005
Thời gian rơi	t_c	(s)	0,27	0,27	0,24

(Cross & Wheatland, 2012) và tính toán từ mô hình của Calkin (Calkin, 1993)

Khi đối chiếu với các kết quả trong nghiên cứu của Cross và Wheatland (Cross & Wheatland, 2012), qua Bảng 1, ta có thể tìm lại giá trị thời gian rơi t_c của cả ba 3 slinky như đã được công bố. Ngoài ra, vì ta chỉ có thể biết được các slinky A và B được treo với “xấp xỉ một hoặc một vòng rưỡi” (Cross & Wheatland, 2012) ở đầu trên nên nếu ta chọn giá trị

trung bình là 1,25 vòng cho cả 2 slinky thì tổng độ dài của từng slinky sẽ khác biệt 2,38% (slinky A) và 5,26% (slinky B) so với giá trị được công bố. Đối với slinky C, kết quả tính toán từ mô hình rời rạc trong bài báo này gần trùng khớp với với kết quả từ mô hình của Calkin (Calkin, 1993).

3. Kết luận

Bài viết này trình bày cách xây dựng một số biểu thức giải tích từ mô hình rời rạc để giải thích hiện tượng lơ lửng của một slinky, xác định vị trí của khối tâm và chiều dài của slinky ở trạng thái cân bằng cũng như có thể xác định thời gian rơi tự do của slinky. Các kết quả thu được từ nghiên cứu này có độ sai biệt không quá 6% so với kết quả thực nghiệm và lý thuyết trong các nghiên cứu được công bố trước đây. Bản chất rời rạc của mô hình đã giúp ta đưa ra lời giải thích xác đáng về phương diện động lực học cho hiện tượng lơ lửng của slinky khi được thả rơi tự do từ trạng thái cân bằng trên phương thẳng đứng. Được xây dựng dựa trên các kiến thức nền tảng của cơ học đại cương và giải tích, bài báo này đề xuất một hướng tiếp cận mới, đơn giản hơn. Hướng tiếp cận này có thể phù hợp với sinh viên chuyên ngành vật lý và cộng đồng những người yêu thích vật lý. Cách tìm ra các biểu thức tính trong bài viết này cũng có thể được sử dụng trong môi trường sư phạm ở bậc đại học như một ví dụ về hiệu quả của phương pháp rời rạc hóa trong việc giải quyết các bài toán vật lý.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Aguirregabiria, J. M., Hernández, A., & Rivas, M. (2007). Falling elastic bars and springs. *American Journal of Physics*, 75(7), 583-587. <https://doi.org/10.1119/1.2733680>
- Calkin, M. G. (1993). Motion of a falling spring. *American Journal of Physics*, 61(3), 261-264. <https://doi.org/10.1119/1.17301>
- Cross, R. C., & Wheatland, M. S. (2012). Modeling a falling slinky. *American Journal of Physics*, 80(12), 1051-1060. <https://doi.org/10.1119/1.4750489>
- Edwards, T. W., & Hultsch, R. A. (1972). Mass Distribution and Frequencies of a Vertical Spring. *American Journal of Physics*, 40(3), 445-449. <https://doi.org/10.1119/1.1986571>
- Graham, M. (2001). Analysis of Slinky levitation. *The Physics Teacher*, 39(2), 90-91. <https://doi.org/10.1119/1.1355166>
- Heard, T. C., & Newby, N. D. (1977). Behavior of a soft spring. *American Journal of Physics*, 45(11), 1102-1106. <https://doi.org/10.1119/1.10956>
- Mak, S. Y. (1987). The static effectiveness mass of a slinky T M . *American Journal of Physics*, 55(11), 994-997. <https://doi.org/10.1119/1.15282>
- Newburgh, R., & Andes, G. M. (1995). Galileo Redux or, how do nonrigid, extended bodies fall? *The Physics Teacher*, 33(9), 586-588. <https://doi.org/10.1119/1.2344314>

- Sawicki, M. “Mik.” (2002). Static Elongation of a Suspended Slinky™. *The Physics Teacher*, 40(5), 276-278. <https://doi.org/10.1119/1.1516379>
- Unruh, W. G. (2011). *The falling slinky*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1110.4368>
- Vanderbei, R. J. (2017). The falling slinky. *Mathematical Association of America*, 124(1), 24-36. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.124.1.24>
-

CHARACTERISTICS OF A SLINKY VIA A DISCRETE MODEL

*Trình Đại Hoàng Long, Nguyễn Lâm Duy**

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Nguyễn Lâm Duy – Email: duyntl@hcmue.edu.vn*

Received: March 12, 2023; Revised: April 08, 2023; Accepted: April 17, 2023

ABSTRACT

A slinky, which is a soft spring, is vertically suspended under the influence of gravity. When equilibrium is attained, the slinky is released by letting go of the top. Observing the free falling slinky shows that its bottom turns remain completely at rest until the upper turns collide with them. This paper proposes a model that provides a reasonable explanation for the stated effect, as well as the descriptions of several physical characteristics of the slinky, such as the elastic elongation in equilibrium, the position of the center of mass, and the total collapse time. The model is based on fundamental mechanics and basic calculus, which are encapsulated in the first year of college for physics majors. Therefore, the falling slinky problem should be more approachable for a wider community of physics students and enthusiasts.

Keywords: center of mass; free falling; slinky