TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 21, Số 5 (2024): 785-799
Website: https://journal.hcmue.edu.vn
ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 21, No. 5 (2024): 785-799
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.5.4021(2024)

Bài báo nghiên cứu

NGHIỆM RENORMALIZED CỦA PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN

Nguyễn Thanh Long[1,2]
[1]*Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*
[2]*Phổ thông Cao đẳng FPT Polytechnic Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam*
Tác giả liên hệ: Nguyễn Thanh Long – Email: longnt86@fe.edu.vn
Ngày nhận bài: 20-11-2023; ngày nhận bài sửa: 04-02-2024; ngày duyệt đăng: 22-3-2024

TÓM TẮT

Mục tiêu chính của bài báo này là chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm Renormalized không âm của phương trình Parabolic liên kết với toán tử phi tuyến, với các hàm dữ liệu thuộc L^1. Kĩ thuật được sử dụng trong quá trình chứng minh là thiết lập bài toán xấp xỉ bằng cách chặt cụt các hàm dữ liệu, sự hội tụ của hàm chặt cụt và các đánh giá để có được nghiệm Renormalized.

Từ khóa: tồn tại; phương trình parabolic phi tuyến; nghiệm renormalized; duy nhất

1. Giới thiệu

Toán tử Fractional Laplace và toán tử phi địa phương được nhiều nhà toán học quan tâm trong những năm gần đây. Toán tử này xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực khác nhau như kĩ thuật, cơ học điện tử, xử lí ảnh, lí thuyết trò chơi, động lực học quần thể, hiện tượng chuyển pha, quá trình ngẫu nhiên Levy trong lí thuyết xác suất, có thể xem trong (Applebaum, 2004; Caffarelli, 2012; Caffarelli & Silvestre, 2007; Caffarelli & Valdinoci, 2011; Metzler & Klafter, 2004). Toán tử phi địa phương p - Laplace $(-\Delta)_p^s$ đã được nghiên cứu trong (Alibaud et al., 2010; Karlsen et al., 2011), hơn nữa trường hợp phương trình dạng Parabolic đã được nghiên cứu trong (Leonori et al., 2015). Các phương trình đạo hàm riêng liên kết với loại toán tử nói trên với dữ liệu có tính trơn kém thu hút nhiều nhà toán học nghiên cứu, chẳng hạn như dữ liệu thuộc L^1 (xem trong (Alibaud et al., 2010)) hoặc dữ liệu là độ đo Radon (xem trong (Petitta, 2016)). Do đó, việc nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho phương trình đạo hàm riêng liên kết với các toán tử kể trên là cần thiết, quan trọng. Mục tiêu chính của bài báo này là chứng minh sự tồn tại và duy nhất nhiệm Renormalized của phương trình Parabolic dạng phi tuyến liên kết với toán tử phi địa phương $\mathcal{L}$, với các dữ liệu có tính trơn kém được giới thiệu sau đây.

Giả sử rằng Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên Lipschitz $\partial\Omega$, T là hằng số dương. Trong bài báo này, chúng tôi xét phương trình Parabolic dạng phi tuyến như sau:

Cite this article as: Nguyen Thanh Long (2024). Renormalized solution for nonlinear parabolic equation. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 21*(5), 785-799.

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = f, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega^C \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$, Ω^C là phần bù của Ω trong $\mathbb{R}^N$, $0 < s < 1 < p < N$, các hàm dữ liệu f và u_0 là các hàm đo được không âm thỏa

$$f \in L^1(\Omega_T) \text{ và } u_0 \in L^1(\Omega). \tag{1.2}$$

Toán tử $\mathcal{L} : X_0^{s,p}(\Omega) \to X_0^{s,p}(\Omega)^*$ xác định bởi

$$\langle \mathcal{L}w, v \rangle = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_\Omega} |w(x) - w(y)|^{p-2} [w(x) - w(y)][v(x) - v(y)] K(x,y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

với mỗi $w, v \in X_0^{s,p}(\Omega)$, trong đó $\mathcal{D}_\Omega = (\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \setminus (\Omega^C \times \Omega^C)$, $X_0^{s,p}(\Omega)$ được giới thiệu ở phần sau, nhân $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện:

(K1) K là hàm đo được;

(K2) K là hàm đối xứng, tức là $K(x,y) = K(y,x)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^N$;

(K3) Tồn tại hằng số $\Lambda > 1$ sao cho $\Lambda^{-1} \le K(x,y)|x-y|^{N+sp} \le \Lambda$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Để thuận tiện cho các chứng minh và định nghĩa, từ đây ta kí hiệu

$\mathrm{d}\nu = K(x,y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Ta định nghĩa không gian $\mathcal{T}_0^{s,p}(\Omega_T)$ là họ các hàm đo được $u : \mathbb{R}^N \times (0,T] \to \mathbb{R}$ sao cho $T_k(u) \in L^p(0,T; X_0^{s,p}(\Omega))$, với mọi $k > 0$; ở đây T_k là hàm chặt cụt tại $k \ge 0$ xác định bởi: với mỗi $z \in \mathbb{R}$ thì

$$T_k(z) = \min\{k, \max\{z, -k\}\} = \begin{cases} \operatorname{sign}(z).k & \text{khi} \quad |z| \ge k, \\ z & \text{khi} \quad |z| \le k. \end{cases}$$

Hàm T_k có một nguyên hàm là $\Theta_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ xác định bởi

$$\Theta_k(z) = \int_0^z T_k(\xi) d\xi = \begin{cases} z^2/2 & \text{khi} \quad |z| \le k, \\ (2k|z| - k^2)/2 & \text{khi} \quad |z| \ge k. \end{cases}$$

Dễ dàng chứng minh được rằng $0 \le \Theta_k(z) \le k|z|$, với mọi $z \in \mathbb{R}$. Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$U(x,y,\xi) = |u(x,\xi) - u(y,\xi)|^{p-2} [u(x,\xi) - u(y,\xi)].$$

Định nghĩa 1.1. *Hàm $u \in \mathcal{T}_0^{s,p}(\Omega_T) \cap C([0,T], L^1(\Omega))$ là nghiệm Renormalized của phương trình (1.1) nếu các điều kiện sau đây thỏa*

(i) $\displaystyle \lim_{h \to \infty} \iiint_{\{(x,y,t):(u(x,t),u(y,t)) \in R_h\}} |u(x,t) - u(y,t)|^{p-1} \mathrm{d}\nu \mathrm{d}t = 0$,

với $R_h = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : h+1 \le \max\{|u|,|v|\}$ *và* $(\min\{|u|,|v|\} \le h$ *hoặc* $uv < 0)\}$.

(ii) *Với mọi* $\varphi \in C^1(\Omega_T)$ *với* $\varphi = 0$ *trên* $\Omega^C \times (0,T)$, $\varphi(\cdot, T) = 0$ *trên* Ω, *với mọi* $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ *thuộc lớp* C^1 *sao cho* S' *có giá compact và thỏa*

$$-\int_{\Omega} S(u_0)\varphi(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^T\int_{\Omega} S(u)\,\varphi_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)[(S'(u)\varphi)(x,t) - (S'(u)\varphi)(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\Omega} f\,S'(u)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \qquad (1.3)$$

Sau đây là kết quả chính của bài báo.

Định lí 1.2. *Dưới giả thiết (1.2), phương trình (1.1) có duy nhất nghiệm Renormalized không âm.*

2. Kiến thức chuẩn bị và các kết quả chính

2.1. Không gian hàm Fractional Sobolev

Với mỗi $p \in [1,\infty]$, ta định nghĩa không gian Sobolev cấp phân số như sau:

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^p(\mathbb{R}^N) : D_p^s u(x,y) := \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \in L^p(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N) \right\}$$

là không gian Banach với chuẩn là

$$\|u\|_{W^{s,p}(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^p\,\mathrm{d}x + \iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

Không gian $X^{s,p}(\Omega)$ là lớp các hàm $u \in L^p(\Omega)$ mà $D_p^s u(x,y) \in L^p(\mathcal{D}_\Omega)$ với chuẩn

$$\|u\|_{X^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p\,\mathrm{d}x + \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

Tiếp theo, ta kí hiệu $X_0^{s,p}(\Omega)$ là không gian các hàm $u \in X^{s,p}(\Omega)$ và triệt tiêu hầu khắp nơi trên Ω^C. Với mọi $u \in X_0^{s,p}(\Omega)$ thì $u = 0$ hầu khắp nơi trên Ω^C, ta có

$$\iint_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega\times\Omega} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\int_{\Omega} |u(x)|^p \int_{\Omega^C} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$$

Kết quả sau đây có trong **Bổ đề 6.1** của (Di Nezza et al., 2012), ta có

$$\int_{\Omega^C} \frac{1}{|x-y|^{N+sp}}\mathrm{d}y \ge C|\Omega|^{-\frac{sp}{N}},$$

với hằng số $C = C(N,s,p)$. Mặt khác, theo bất đẳng thức Poincare ta có

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \le C\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Do đó tồn tại hằng số dương $C = C(N,s,p,\Omega)$ sao cho với mọi $u \in X_0^{s,p}(\Omega)$ thì

$$\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \|u\|_{X^{s,p}(\Omega)}^p \le C\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|D_p^s u(x,y)\right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Do đó, ta có chuẩn tương đương với chuẩn trên không gian $X_0^{s,p}(\Omega)$ là

$$\|u\|_{X_0^{s,p}(\Omega)} = \left(\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left| D_p^s u(x,y) \right|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/p} = \left(\iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \right)^{1/p}.$$

Tiếp theo, ta giới thiệu về không gian có biến thời gian $L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))$ là không gian gồm tất cả các hàm số $u \in L^p(\Omega_T)$ thỏa $\|u\|_{L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))}$ hữu hạn với

$$\|u\|_{L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))} = \left(\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|^p}{|x-y|^{N+sp}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \right)^{1/p}.$$

Không gian $L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))$ cùng với chuẩn $\|\cdot\|_{L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))}$ là không gian Banach, có không gian đối ngẫu là $L^{p'}(0,T;X_0^{s,p}(\Omega)^*)$, với p' là số mũ liên hợp Holder của p.

2.2. Sự tồn tại nghiệm yếu

Ta chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu (1.1) với dữ liệu ban đầu đủ trơn. Để đơn giản cho các chứng minh, ta kí hiệu $E = L^p(0,T;X_0^{s,p}(\Omega))$ và $E^* = L^{p'}(0,T;X_0^{s,p}(\Omega)^*)$.

Bổ đề 2.1. *Dưới giả thiết $u_0 \in L^2(\Omega)$ và $f \in E^*$, phương trình (1.1) có duy nhất nghiệm yếu, tức là, $u \in E \cap C([0,T];L^2(\Omega))$ với $u_t \in E^*$ và*

$$\int_0^T \langle u_t, \varphi \rangle \mathrm{d}t + \int_0^T \langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle \mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \quad (2.1)$$

với mọi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$.

Chứng minh. Lấy $n \in \mathbb{N}$ thỏa $n > T$. Đặt $h = T/n \in (0,1)$. Ta kí hiệu f_h là trung bình Steklov của f xác định bởi

$$f_h(x,t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(x,\xi)\mathrm{d}\xi \text{ hầu khắp nơi } (x,t) \in \Omega_T.$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta xét bài toán rời rạc theo biến thời gian sau

$$\begin{cases} \dfrac{u_k(x)-u_{k-1}(x)}{h} + \mathcal{L}u_k(x) = f_h(x,(k-1)h), & x \in \Omega, \\ u_k(x) = 0, & x \in \Omega^C. \end{cases} \quad (2.2)$$

Với $k=1$, xét phiếm hàm $F : W \to \mathbb{R}$, với $W = X_0^{s,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, xác định bởi

$$F(u) = \frac{1}{2h} \int_\Omega (u-u_0)^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2p} \iint_{\mathcal{D}_\Omega} |u(x)-u(y)|^p \,\mathrm{d}\nu - \langle f_h(\cdot,0), u \rangle, \; u \in W.$$

Theo **Định lí 1.5.6** trong (Badiale & Serra, 2011), vì phiếm hàm F liên tục, cưỡng bức và lồi ngặt nên F tồn tại duy nhất điểm cực tiểu trên W, gọi điểm cực tiểu đó là $u_1 \in W$.

Với mỗi $k \ge 2$, thực hiện tương tự ta thu được $u_k \in W$ là nghiệm của phương trình (2.2). Khi đó, với mọi hàm thử $\varphi \in W$, ta có

$$\int_\Omega \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \left\langle \mathcal{L}u_k, \varphi \right\rangle \mathrm{d}x = \left\langle f_h(\cdot,(k-1)h), \varphi \right\rangle. \tag{2.3}$$

Với mọi $h = T/n$, ta định nghĩa nghiệm xấp xỉ như sau

$$u_h(x,t) = \begin{cases} u_0(x), & t = 0, \\ \ldots & \ldots \\ u_j(x), & (j-1)h < t \le jh, \\ \ldots & \ldots \\ u_n(x), & (n-1)h < t \le nh = T. \end{cases}$$

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$ và $t \in ((k-1)h, kh]$, trong (2.3) ta cho $\varphi = u_k$ dẫn đến

$$\int_\Omega [u_h(x,t)]^2 \mathrm{d}x \le C \qquad \text{và} \qquad \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left| u_h(x,\xi) - u_h(y,\xi) \right|^p \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\xi \le C,$$

với $C > 0$ độc lập với h. Từ đây thu được đánh giá $\|u_h\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_h\|_E \le C$. Khi đó tồn tại dãy con của $\{u_h\}_h$ (vẫn kí hiệu tương tự) sao cho

u_h hội tụ yếu-$*$ về u trong $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ và u_h hội tụ yếu về u trong E.

Ta chọn tùy ý $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_T)$ là hàm thử trong (2.3) ta thu được

$$-\int_0^T \int_\Omega u_h(x,t) \frac{\varphi(x,t+h) - \varphi(x,t)}{h} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \left\langle \mathcal{L}u_h, \varphi \right\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \left\langle f, \varphi \right\rangle \mathrm{d}t, \tag{2.4}$$

với h đủ nhỏ. Trong (2.4), cho $n \to \infty$ thì $h \to 0^+$, dẫn đến

$$-\int_0^T \int_\Omega u\varphi_t \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \left\langle \mathcal{L}u, \varphi \right\rangle \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \left\langle f, \varphi \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Từ đẳng thức trên ta được $u_t \in E^*$ và (2.1) thỏa. Ngoài ra, với $u \in E \cap L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ nên ta có thể kết luận $u \in E \cap C([0,T];L^2(\Omega))$. Vậy u là nghiệm yếu của phương trình (1.1).

Gọi u và v là hai nghiệm yếu của phương trình (1.1). Kí hiệu

$V(x,y,\xi) = \left| v(x,\xi) - v(y,\xi) \right|^{p-2} [v(x,\xi) - v(y,\xi)]$ với $(x,\xi),(y,\xi) \in \Omega_T$.

Khi đó $w = u - v$ là nghiệm yếu của phương trình

$$\begin{cases} w_t + \mathcal{L}u - \mathcal{L}v = 0, & (x,t) \in \Omega_T, \\ w(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega^C \times (0,T), \\ w(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases}$$

Chọn w là hàm thử cho phương trình trên và nhân 2 hai vế, ta được

$$\int_\Omega [w(t)]^2 dx + \int_0^t \iint_{\mathcal{D}_\Omega} [U(x,y,\xi) - V(x,y,\xi)]$$

$$\times \left[(u(x,\xi) - u(y,\xi)) - (v(x,\xi) - v(y,\xi)) \right] \mathrm{d}\nu \mathrm{d}\xi = 0, \text{ hầu khắp nơi } t \in (0,T).$$

Vì hai số hạng của vế trái là không âm, nên ta có $u = v$ hầu khắp nơi trên Ω_T. □

2.3. Sự tồn tại nghiệm Renormalized

Đặt $0 \le f_n = T_n(f) \in L^\infty(\Omega_T)$ và $0 \le u_{0n} = T_n(u_0) \in L^\infty(\Omega)$. Suy ra $(f_n, u_{0n}) \to (f, u_0)$ mạnh trong $L^1(\Omega_T) \times L^1(\Omega)$, $\|f_n\|_{L^1(\Omega_T)} \le \|f\|_{L^1(\Omega_T)}$ và $\|u_n\|_{L^1(\Omega)} \le \|u\|_{L^1(\Omega)}$. Ta xét phương trình xấp xỉ của (1.1) như sau

$$\begin{cases} (u_n)_t + \mathcal{L}u_n = f_n, & (x,t) \in \Omega_T, \\ u_n(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega^C \times (0,T), \\ u_n(x,0) = u_{0n}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Theo Bổ đề 2.1, phương trình (2.5) có duy nhất nghiệm yếu u_n. Dãy $\{u_n\}_n$ là dãy tăng và không âm (theo nguyên lí so sánh). Ta chứng minh $\{u_n\}_n$ có một dãy con hội tụ về hàm đo được u thích hợp, cũng chính là nghiệm Renormalized cho phương trình (1.1). Để thuận tiện cho các chứng minh, ta kí hiệu

$$U_n(x,y,\xi) = |u_n(x,\xi) - u_n(y,\xi)|^{p-2}[u_n(x,\xi) - u_n(y,\xi)].$$

Bổ đề 2.2. *Tồn tại $u \in \mathcal{T}_0^{s,p}(\Omega_T) \cap C([0,T], L^1(\Omega))$ sao cho u_n hội tụ hầu khắp nơi về u trên Ω_T.*

Chứng minh. Lấy $m, n \in \mathbb{N}$ và $t \in (0,T]$, chọn $\varphi = T_1(u_n - u_m)\chi_{(0,t)}$, theo (2.1), ta được

$$\int_0^t \left\langle (u_n - u_m)_t, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau + \int_0^t \left\langle \mathcal{L}u_n - \mathcal{L}u_m, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (f_n - f_m) T_1(u_n - u_m) \chi_{(0,t)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \tag{2.6}$$

Số hạng thứ hai của (2.6) là không âm. Thật vậy, ta có

$$\int_0^t \left\langle \mathcal{L}u_n - \mathcal{L}u_m, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau = \int_0^t \left\langle \mathcal{L}u_n, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau - \int_0^t \left\langle \mathcal{L}u_m, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \iint_{\mathcal{D}_\Omega} [U_n(x,y,\tau) - U_m(x,y,\tau)].\left[T_1(u_n - u_m)(x,\tau) - T_1(u_n - u_m)(y,\tau)\right] \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\tau.$$

Theo định lí giá trị trung bình, ta có

$$T_1(u_n - u_m)(x,\tau) - T_1(u_n - u_m)(y,\tau) = T_1'(\xi_{nm})[(u_n - u_m)(x,\tau) - (u_n - u_m)(y,\tau)].$$

Cùng với $T_1' \ge 0$, ta có số hạng thứ hai của (2.6) là số không âm. Do đó

$$\int_0^t \left\langle (u_n - u_m)_t, T_1(u_n - u_m) \right\rangle \mathrm{d}\tau \le \int_0^T \int_\Omega (f_n - f_m) T_1(u_n - u_m) \chi_{(0,t)} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Khi đó ta có đánh giá

$$\int_\Omega \Theta_1(u_{0n} - u_{0m})(x,t)\,\mathrm{d}x \le \|u_{0n} - u_{0m}\|_{L^1(\Omega)} + \|f_n - f_m\|_{L^1(\Omega_T)} =: a_{n,m}.$$

Từ định nghĩa của Θ_1 kết hợp cùng đánh giá trên, ta có

$$\int_{\{|u_n-u_m|<1\}} \left|(u_n-u_m)(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x + \int_{\{|u_n-u_m|\ge 1\}} \left|(u_n-u_m)(x,t)\right| \mathrm{d}x \le 2\int_\Omega \Theta_1(u_{0n}-u_{0m})(x,t)\,\mathrm{d}x \le 2a_{n,m}.$$

Do đó, với mọi $t\in(0,T]$ thì

$$\left\|(u_n-u_m)(t)\right\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\{|u_n-u_m|<1\}} \left|(u_n-u_m)(x,t)\right| \mathrm{d}x + \int_{\{|u_n-u_m|\ge 1\}} \left|(u_n-u_m)(x,t)\right| \mathrm{d}x$$

$$\le |\Omega|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\{|u_n-u_m|<1\}} \left|(u_n-u_m)(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} + 2a_{n,m} \le |\Omega|^{\frac{1}{2}} (2a_{n,m})^{\frac{1}{2}} + 2a_{n,m}.$$

Vì $(f_n,u_{0n})\to(f,u_0)$ mạnh trong $L^1(\Omega_T)\times L^1(\Omega)$ nên $\lim\limits_{n,m\to\infty} a_{n,m}=0$, do đó $\{u_n\}_n$ là dãy Cauchy trong $C([0,T];L^1(\Omega))$ nên $\{u_n\}_n$ hội tụ mạnh về u trong $C([0,T];L^1(\Omega))$, do đó tìm được dãy con (vẫn kí hiệu là $\{u_n\}_n$) hội tụ hầu khắp nơi về u trên Ω_T. □

Bổ đề 2.3. *Với mỗi k là số dương, $T_k(u_n)$ hội tụ mạnh về $T_k(u)$ trong E khi $n\to+\infty$.*

Chứng minh. Lấy $k>0$ tùy ý. Nhắc lại về bất đẳng thức đại số sau

$$|T_k(\alpha)-T_k(\beta)|^p \le |\alpha-\beta|^{p-2}(\alpha-\beta)[T_k(\alpha)-T_k(\beta)],\ \alpha,\beta\in\mathbb{R},\ p\ge 1.$$

Chọn $T_k(u_n)$ là hàm thử trong (2.5) ta được

$$\int_\Omega \Theta_k(u_n)(x,T)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \Theta_k(u_{0n})(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^T \langle \mathcal{L}u_n, T_k(u_n)\rangle \mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f_n\, T_k(u_n)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Từ tính chất $0\le\Theta_k(z)\le k.|z|$, $0\le T_k'\le 1$ và bất đẳng thức đại số, ta có

$$\begin{aligned}\|T_k(u_n)\|_E^p &\le \Lambda\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|T_k(u_n)(x,t)-T_k(u_n)(y,t)\right|^p \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t\\ &\le \Lambda\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[T_k(u_n)(x,t)-T_k(u_n)(y,t)]\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t\\ &\le 2k\Lambda\|f_n\|_{L^1(\Omega_T)} + 2k\Lambda\|u_{0n}\|_{L^1(\Omega)} \le 2k\Lambda\|f\|_{L^1(\Omega_T)} + 2k\Lambda\|u_0\|_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Vậy dãy $\{T_k(u_n)\}_n$ bị chặn trong E nên có dãy con hội tụ yếu về $T_k(u)$ trong E.

Để xử lí đạo hàm theo thời gian của hàm chặt cụt, ta dùng phương pháp trong (Landes, 1981) bằng cách sử dụng dãy $(T_k(u))_\mu$ xấp xỉ $T_k(u)$. Với $\mu>0$, ta định nghĩa

$$(T_k(u))_\mu(x,t) = \mu\int_{-\infty}^t e^{\mu(\xi-t)} T_k(u(x,\xi))\,\mathrm{d}\xi.$$

Dễ thấy rằng $(T_k(u))_\mu \in E\cap L^\infty(\Omega_T)$, $\left|(T_k(u))_\mu(x,t)\right| \le k(1-e^{-\mu t})<k$ hầu khắp nơi $(x,t)\in\Omega_T$ và $(T_k(u))_\mu$ khả vi hầu khắp nơi $t\in(0,T)$ với

$$[(T_k(u))_\mu]_t = \mu[T_k(u)-(T_k(u))_\mu].$$

Thực hiện tính toán, ta có được $(T_k(u))_\mu \to T_k(u)$ mạnh trong E. Theo tính trù mật, tồn tại $\{\omega_j\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ hội tụ mạnh về u_0 trong $L^1(\Omega)$. Đặt $\eta_{\mu,j}(u) = (T_k(u))_\mu + e^{-\mu t}T_k(\omega_j)$. Hàm $\eta_{\mu,j}(u)$ là một xấp xỉ trơn của $T_k(u)$, có các tính chất sau

$$(\eta_{\mu,j}(u))_t = \mu[T_k(u) - \eta_{\mu,j}(u)],\ \eta_{\mu,j}(u)(x,0) = T_k(\omega_j)(x),\ \left|\eta_{\mu,j}(u)\right| \le k,$$

$\eta_{\mu,j}(u) \to T_k(u)$ hội tụ mạnh trong E, khi $\mu \to \infty$.

Cố định số $k > 0$. Với $h > k$, ta chọn $\varphi_n = T_{2k}(u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - \eta_{\mu,j}(u))$ là hàm thử trong (2.5) ta được

$$\int_0^T \left\langle (u_n)_t, \varphi_n \right\rangle \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[\varphi_n(x,t) - \varphi_n(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f_n\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

Kí hiệu $\theta(n,\mu,j,h)$ là tất cả các đại lượng sao cho

$$\lim_{h\to\infty}\lim_{j\to\infty}\lim_{\mu\to\infty}\lim_{n\to\infty}\theta(n,\mu,j,h) = 0.$$

Theo một phần của bước 2 trong chứng minh Định lí 1.1 của (Zhang & Zhou, 2010) ta thu được đánh giá

$$\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$

$$\le \int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[T_k(u(x,t)) - T_k(u(y,t))]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t + \theta(n,\mu,j,h).$$

Khi đó theo Bổ đề 3.6 trong (Abdellaoui et al., 2016) cùng với tính không âm, đơn điệu tăng của dãy $\{u_n\}_n$ ta được

$$\limsup_{n\to\infty}\int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))\right|^p \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t \le \int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} \left|T_k(u_n(x,t)) - T_k(u_n(y,t))\right|^p \mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t.$$

Mặt khác, dãy $\{T_k(u_n)\}_n$ hội tụ yếu về $T_k(u)$ trong E, do đó

$$T_k(u_n) \to T_k(u) \text{ mạnh trong } E. \tag{2.7}$$

Bổ đề 2.4. *Hàm u trong Bổ đề 2.3 là nghiệm Renormalized duy nhất của (1.1).*

Chứng minh. Chứng minh được chia thành hai phần: sự tồn tại và sự duy nhất.

a) Chứng minh sự tồn tại của nghiệm Renormalized.

Xét $L_k(z) = z - T_k(z)$ thì $L_k' \ge 0$. Chọn $T_1(L_h(u_n))$ là hàm thử trong (2.5), ta được

$$\int_0^T \left\langle (u_n)_t, T_1(L_h(u_n)) \right\rangle \mathrm{d}t + \int_0^T \left\langle \mathcal{L}u_n, T_1(L_h(u_n)) \right\rangle \mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f_n\,T_1(L_h(u_n))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Ta có đánh giá số hạng thứ nhất trong biểu thức trên là

$$\int_{\{|u_n|>h\}} \Theta_1(u_n \mp h)(x,T)\,\mathrm{d}x - \int_{\{|u_{0n}|>h\}} \Theta_1(u_{0n} \mp h)(x)\mathrm{d}x \le \int_0^T \left\langle (u_n)_t, T_1(L_h(u_n)) \right\rangle \mathrm{d}t.$$

Suy ra

$$\int_0^T \langle \mathcal{L}u_n, T_1(L_h(u_n))\rangle \mathrm{d}t \le \int_0^T\int_\Omega f_n\, T_1(L_h(u_n))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \int_{\{|u_n|>h\}} \Theta_1(u_n \mp h)(x,T)\mathrm{d}x + \int_{\{|u_{0n}|>h\}} \Theta_1(u_{0n}\mp h)(x)\mathrm{d}x$$
$$\le \int_0^T \int_{\{|u_n|>h\}} |f_n|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{\{|u_{0n}|>h\}} |u_{0n}|\,dx.$$

Áp dụng định lí giá trị trung bình, công thức đạo hàm hợp và $T_k' \ge 0$, $L_k' \ge 0$, ta có

$$U_n(x,y,t)[T_1(L_h(u_n))(x,t) - T_1(L_h(u_n))(y,t)] = T_1'(L_h(\xi_n)).L_h'(\xi_n).|u_n(x,t)-u_n(y,t)|^p$$

là không âm. Từ sự hội tụ của dãy $\{u_n\}_n$ về u trong $C([0,T];L^1(\Omega))$ thu được giới hạn

$\lim\limits_{h\to\infty} \left|\left\{(x,t)\in\Omega_T : |u_n|>h\right\}\right| = 0$ hội tụ đều đối với mỗi n.

Với mọi $(u_n(x,t), u_n(y,t)) \in R_h$ thì

$$U_n(x,y,t)\left[T_1(L_h(u_n))(x,t) - T_1(L_h(u_n))(y,t)\right] \ge |u_n(x,t)-u_n(y,t)|^{p-1}.$$

Sử dụng Bổ đề Fatou, qua giới hạn cho $n\to\infty$ và sau đó cho $h\to\infty$, ta có điều kiện **(i)** của nghiệm Renormalized, tức là

$$\lim_{h\to\infty} \iiint_{\{(x,y,t):(u(x,t),u(y,t))\in R_h\}} |u(x,t)-u(y,t)|^{p-1}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t = 0. \tag{2.8}$$

Lấy $S\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ sao cho $\operatorname{supp} S' \subset [-M,M]$, với $M>0$ nào đó. Ta phân hoạch $\mathcal{D}_\Omega\times(0,T) = \mathcal{D}_1\cup\mathcal{D}_2\cup\mathcal{D}_3\cup\mathcal{D}_4$, trong đó:

$\mathcal{D}_1 = \{(x,y,t)\in\mathcal{D}_\Omega\times(0,T) : u_n(x,t)\ge M,\ u_n(y,t)\ge M\}$,

$\mathcal{D}_2 = \{(x,y,t)\in\mathcal{D}_\Omega\times(0,T) : u_n(x,t)\le M,\ u_n(y,t)\le M\}$,

$\mathcal{D}_3 = \{(x,y,t)\in\mathcal{D}_\Omega\times(0,T) : u_n(x,t)\ge M,\ u_n(y,t)\le M\}$,

$\mathcal{D}_4 = \{(x,y,t)\in\mathcal{D}_\Omega\times(0,T) : u_n(x,t)\le M,\ u_n(y,t)\ge M\}$.

Với mỗi $\varphi\in C^1(\Omega_T)$ sao cho $\varphi=0$ trên $\Omega^C\times(0,T)$, $\varphi(\cdot,T)=0$ trên Ω, chọn $S'(u_n)\varphi$ là hàm thử trong (2.5) ta được

$$\int_0^T \langle (u_n)_t, S'(u_n)\varphi\rangle\mathrm{d}t + \int_0^T \langle \mathcal{L}u_n, S'(u_n)\varphi\rangle \mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega f_n\, S'(u_n)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

hay

$$\int_0^T\int_\Omega (S(u_n))_t\varphi\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u_n)(x,t)+S'(u_n)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)\left[S'(u_n)(x,t)-S'(u_n)(y,t)\right]\cdot\frac{\varphi(x,t)+\varphi(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f_n S'(u_n)\varphi \, dx \, dt . \tag{2.9}$$

Xét số hạng đầu tiên của vế trái trong (2.9), ta có vì S liên tục và bị chặn, u_n hội tụ hầu khắp nơi trên Ω_T về u, nên $S(u_n)$ hội tụ hầu khắp nơi trên Ω_T về $S(u)$ và hội tụ yếu-* trong $L^\infty(\Omega_T)$. Khi đó $(S(u_n))_t$ hội tụ về $S(u_n)$ trên $D'(\Omega_T)$ khi $n \to \infty$, tức là

$$\int_0^T \int_\Omega S(u_n)\varphi_t \, dxdt \to \int_0^T \int_\Omega S(u)\varphi_t \, dxdt, \text{ khi } n \to \infty .$$

Do đó,

$$\int_0^T \int_\Omega (S(u_n))_t \varphi \, dxdt \to -\int_\Omega S(u_0)\varphi(x,0) \, dx + \int_0^T \int_\Omega S(u)\varphi_t \, dxdt, \text{ khi } n \to \infty .$$

Nhờ vào sự hội tụ của dãy $\{f_n\}_n$ cho ta kết quả qua giới hạn của vế phải (2.9):

$$\int_0^T \int_\Omega f_n S'(u_n)\varphi \, dx \, dt \to \int_0^T \int_\Omega f \, S'(u)\varphi \, dx \, dt, \text{ khi } n \to \infty .$$

Với số hạng thứ hai của (2.9), ta có được

$$\mathcal{K}_1 := \int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U_n(x,y,t)[\varphi(x,t) - \varphi(y,t)] \cdot \frac{S'(u_n)(x,t) + S'(u_n)(y,t)}{2} \, d\nu \, dt$$

$$\to \int_0^T \iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)[\varphi(x,t) - \varphi(y,t)] \cdot \frac{S'(u)(x,t) + S'(u)(y,t)}{2} \, d\nu \, dt, \text{ khi } n \to \infty .$$

Trên $\mathcal{D}_1$, ta có $S'(u_n)(x,t) = S'(u_n)(y,t) = 0$ do $\operatorname{supp} S' \subset [-M, M]$.

Trên $\mathcal{D}_2$, ta có $u_n(x,t) = T_M(u_n)(x,t)$ và $u_n(y,t) = T_M(u_n)(y,t)$. Từ (2.7) ta có

$$\frac{|T_M(u_n(x,t)) - T_M(u_n(y,t))|^{p-2} [T_M(u_n(x,t)) - T_M(u_n(y,t))]}{|x-y|^{(N+sp)/p'}}$$

$$\to \frac{|T_M(u(x,t)) - T_M(u(y,t))|^{p-2} [T_M(u(x,t)) - T_M(u(y,t))]}{|x-y|^{(N+sp)/p'}} \text{ mạnh trong } L^{p'}(\mathcal{D}_\Omega \times (0,T)) .$$

Ngoài ra, ta lại có u_n hội tụ hầu khắp nơi về u trên Ω_T, do đó

$$\frac{\varphi(x,t) - \varphi(y,t)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \cdot \chi_{\mathcal{D}_2} \in L^p(\mathcal{D}_\Omega \times (0,T))$$

và

$$\frac{\varphi(x,t) - \varphi(y,t)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \cdot \frac{S'(u_n)(x,t) + S'(u_n)(y,t)}{2} \cdot \chi_{\mathcal{D}_2}$$

$$\rightharpoonup \frac{\varphi(x,t) - \varphi(y,t)}{|x-y|^{(N+sp)/p}} \cdot \frac{S'(u)(x,t) + S'(u)(y,t)}{2} \cdot \chi_{\{u(x,t) \le M, u(y,t) \le M\}} \text{ yếu trong } L^{p'}(\mathcal{D}_\Omega \times (0,T)) .$$

Do đó ta có

$$\iiint_{\mathcal{D}_2} U_n(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u_n)(x,t)+S'(u_n)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$

$$\to \iiint_{\{u(x,t)\le M, u(y,t)\le M\}} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t, \text{ khi } n\to\infty.$$

Trên $\mathcal{D}_3$, nếu $u_n(x,t)\le M+1$ thì ta có thể thực hiện tương tự đánh giá trên $\mathcal{D}_2$. Nếu $u_n(x,t)\ge M+1$ thì $\max\{u_n(x,t),\, u_n(y,t)\}\ge M+1$ và $\min\{u_n(x,t),\, u_n(y,t)\}\le M$. Từ (2.8) ta có

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iiint_{\{(u_n(x,t),u_n(y,t))\in R_M\}} \left|u_n(x,t)-u_n(y,t)\right|^{p-1}\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t=0.$$

Từ đây ta có

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\iiint_{\{u_n(x,t)\ge M+1, u_n(y,t)\le M\}} U_n(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u_n)(x,t)+S'(u_n)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t=0.$$

Trên $\mathcal{D}_4$, các đánh giá thực hiện tương tự trên $\mathcal{D}_3$.

Do đó, ta có đánh giá như sau

$$\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathcal{K}_1$$

$$=\lim_{M\to\infty}\iiint_{\{u(x,t)\le M, u(y,t)\le M\}} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{M\to\infty}\iiint_{\{M\le u(x,t)\le M+1, u(y,t)\le M\}} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$

$$+\lim_{M\to\infty}\iiint_{\{u(x,t)\le M, M\le u(y,t)\le M+1\}} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t.$$

Với số hạng thứ ba của (2.9), ta thực hiện tương tự, do đó ta có

$$-\int_\Omega S(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^T\int_\Omega S(u)\varphi_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)[\varphi(x,t)-\varphi(y,t)]\cdot\frac{S'(u)(x,t)+S'(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)\left[S'(u)(x,t)-S'(u)(y,t)\right]\cdot\frac{\varphi(x,t)+\varphi(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^T\int_\Omega f\,S'(u)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

hay

$$-\int_{\Omega} S(u_0)\varphi(x,0)\,\mathrm{d}x + \int_0^T\int_{\Omega} S(u)\varphi_t\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)[(S'(u)\varphi)(x,t)-(S'(u)\varphi)(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\Omega} f\,S'(u)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,.$$

Vậy u là nghiệm Renormalized của phương trình (1.1).

b) Chứng minh sự duy nhất của nghiệm Renormalized.

Gọi u, v là hai nghiệm Renormalized của phương trình (1.1). Với số dương σ, đặt

$$S_\sigma(z)=\begin{cases} z & \text{khi} \quad |z|<\sigma,\\ \left(\sigma+\dfrac{1}{2}\right)\mp\dfrac{1}{2}\left[z\mp(\sigma+1)\right]^2 & \text{khi} \quad \sigma\le \pm z\le \sigma+1,\\ \pm\left(\sigma+1/2\right) & \text{khi} \quad \pm z>\sigma+1.\end{cases} \tag{2.10}$$

Ta thấy được rằng

$$S'_\sigma(z)=\begin{cases} 1 & \text{khi} \quad |z|<\sigma,\\ (\sigma+1)-|z| & \text{khi} \quad \sigma\le |z|\le \sigma+1,\\ 0 & \text{khi} \quad |z|>\sigma+1.\end{cases}$$

Dễ dàng kiểm tra được $S_\sigma \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ và $\operatorname{supp} S'_\sigma \subset [-\sigma-1,\sigma+1]$. Chọn $S=S_\sigma$ trong (1.3) thu được

$$\int_0^T \left\langle (S_\sigma(u))_t,\varphi\right\rangle \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))\cdot\frac{S'_\sigma(u)(x,t)+S'_\sigma(u)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} U(x,y,t)(S'_\sigma(u)(x,t)-S'_\sigma(u)(y,t))\cdot\frac{\varphi(x,t)+\varphi(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\Omega} f\,S'_\sigma(u)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

và

$$\int_0^T \left\langle (S_\sigma(v))_t,\varphi\right\rangle \mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} V(x,y,t)(\varphi(x,t)-\varphi(y,t))\cdot\frac{S'_\sigma(v)(x,t)+S'_\sigma(v)(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega} V(x,y,t)(S'_\sigma(v)(x,t)-S'_\sigma(v)(y,t))\cdot\frac{\varphi(x,t)+\varphi(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\Omega} f\,S'_\sigma(v)\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,,$$

với mọi $\varphi\in C^1(\Omega_T)$ với $\varphi=0$ trên $\Omega^C\times(0,T)$, $\varphi(\cdot,T)=0$ trên Ω.

Cố định $k>0$, trong các đẳng thức trên, chọn $\varphi=T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))$ và trừ theo vế, ta được

$$\mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2+\mathcal{A}_3=\mathcal{A}\,, \tag{2.11}$$

với

$$\mathcal{A}_1=\int_0^T \left\langle (S_\sigma(u)-S_\sigma(v))_t, T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))\right\rangle \mathrm{d}t\,,$$

$$\mathcal{A}_2=\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\left[U(x,y,t)\cdot\frac{S'_\sigma(u)(x,t)+S'_\sigma(u)(y,t)}{2}-V(x,y,t)\cdot\frac{S'_\sigma(v)(x,t)+S'_\sigma(v)(y,t)}{2}\right]$$
$$\times[T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,t)-T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{A}_3=\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}[U(x,y,t)\cdot[S'_\sigma(u)(x,t)-S'_\sigma(u)(y,t)]-V(x,y,t)\cdot[S'_\sigma(v)(x,t)-S'_\sigma(v)(y,t)]]$$
$$\times\frac{T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,t)+T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(y,t)}{2}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{A}=\int_0^T\int_\Omega f\,[S'_\sigma(u)-S'_\sigma(v)]T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t.$$

Ta lần lượt đánh giá $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ và $\mathcal{A}$. Vì $\Theta_k\ge 0$ là nguyên hàm của T_k nên

$$\mathcal{A}_1=\int_\Omega\Theta_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))\,\mathrm{d}x\ge 0,$$

do $u(x,0)=v(x,0)=u_0(x)$ nên $\Theta_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,0)=0$.

Viết lại $\mathcal{A}_2$ như sau

$$\mathcal{A}_2=\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}[U(x,y,t)-V(x,y,t)]\cdot[T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,t)-T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\left(\frac{S'_\sigma(u)(x,t)+S'_\sigma(u)(y,t)}{2}-1\right)\cdot U(x,y,t)$$
$$\times[T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,t)-T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\left(1-\frac{S'_\sigma(v)(x,t)+S'_\sigma(v)(y,t)}{2}\right)\cdot V(x,y,t)$$
$$\times[T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(x,t)-T_k(S_\sigma(u)-S_\sigma(v))(y,t)]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t$$
$$:=\mathcal{A}_{2,1}+\mathcal{A}_{2,2}+\mathcal{A}_{2,3}.$$

Với $\sigma\ge k$, ta có

$$\mathcal{A}_{2,1}\ge\frac{1}{2}\iiint_{\left\{|u|,|v|\le\frac{k}{2}\right\}}[U(x,y,t)-V(x,y,t)]\cdot[(u(x,t)-u(y,t))-(v(x,t)-v(y,t))]\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t.\tag{2.12}$$

Vì $S'_\sigma(z)=1$ khi σ đủ lớn nên theo Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, ta có được $|\mathcal{A}_{2,2}|\to 0$ và $|\mathcal{A}_{2,3}|\to 0$ khi $\sigma\to+\infty$. Hơn nữa

$$|\mathcal{A}_3|\le C\iiint_{\{(u(x,t),u(y,t))\in R_\sigma\}}|u(x,t)-u(y,t)|^{p-1}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t+C\iiint_{\{(v(x,t),v(y,t))\in R_\sigma\}}|v(x,t)-v(y,t)|^{p-1}\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t.$$

Vì u, v là hai nghiệm Renormalized nên theo Định nghĩa 1.1, (i), ta có $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}|\mathcal{A}_3|=0$.

Ngoài ra, vì $f[S'_\sigma(u)-S'_\sigma(v)]\to 0$ mạnh trong $L^1(\Omega)$ nên theo Định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, ta có $\lim\limits_{\sigma\to+\infty}|\mathcal{A}|=0$. Cho $\sigma\to+\infty$ trong (2.11), cùng với đánh giá (2.12) ta được

$$\iiint\limits_{\{|u|,|v|\le k/2\}} [U(x,y,t)-V(x,y,t)]\cdot[(u(x,t)-u(y,t))-(v(x,t)-v(y,t))]\mathrm{d}\nu\mathrm{d}t=0.$$

Điều này dẫn đến là $u(x,t)-u(y,t)=v(x,t)-v(y,t)$ hầu khắp nơi $(x,y,t)\in\left\{|u|,|v|\le\frac{k}{2}\right\}$.

Vì k tùy ý nên $u(x,t)-u(y,t)=v(x,t)-v(y,t)$ hầu khắp nơi $(x,y,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\times(0,T)$. Nhắc lại về bất đẳng thức Poincaré (với $p=1$) ta thu được

$$0\le\int_0^T\int_\Omega|u(x,t)-v(x,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C\int_0^T\iint_{\mathcal{D}_\Omega}\frac{|(u(x,t)-u(y,t))-(v(x,t)-v(y,t))|}{|x-y|^{N+s}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}t=0.$$

Dẫn đến $u=v$ hầu khắp nơi trên Ω_T. Kết thúc chứng minh. □

3. Kết luận và mở rộng

Trong bài báo này, chúng tôi đã thu được kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm Renormalized cho phương trình Parabolic phi tuyến liên kết với toán tử phi tuyến và phi địa phương $\mathcal{L}$, là trường hợp tổng quát hơn của toán tử $(-\Delta)_p^s$.

Tiếp theo, chúng tôi nghiên cứu về sự tồn tại và duy nhất nghiệm Entropy cho phương trình (1.1), đồng thời tìm mối liên hệ giữa nghiệm Renormalized đã nghiên cứu trong bài báo này và nghiệm Entropy được nói trên.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alibaud, N., Andreianov, B., & Bendahmane, M. (2010). Renormalized solutions of the fractional Laplace equation. *Comptes Rendus Mathematique*, *348*(13), 759-762. https://doi.org/10.1016/j.crma.2010.05.006

Abdellaoui, B., Attar, A., & Bentifour, R. (2016). On the fractional *p*-Laplacian equations with weight and general datum. *Advances in Nonlinear Analysis*, *8*(1), 144-174. https://doi.org/10.1515/anona-2016-0072

Applebaum, D. (2004). Lévy processes–from probability to finance quantum groups. *Notices of the American Mathematical Society*, *51*(11) 1336-1347.

Badiale, M., & Serra, E. (2011). *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*. Universitext. Springer, London. https://doi.org/10.1007/978-0-85729-227-8

Caffarelli, L. (2012). Non-local Diffusions, Drifts and Games. In: Holden, H., Karlsen, K. (eds.), *Nonlinear Partial Differential Equations* (vol 7, pp. 37-52). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-25361-4_3

Caffarelli, L., & Silvestre, L. (2007). An extension problem related to the fractional Laplacian, Communications in Partial Differential Equations, *32*, 1245-1260. https://doi.org/10.1080/03605300600987306

Caffarelli, L., & Valdinoci, E. (2011). Uniform estimates and limiting arguments for nonlocal minimal surfaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, *41*(2011), 203-240. https://doi.org/10.1007/s00526-010-0359-6

Di Nezza, E., Palatucci, G., & Valdinoci, E. (2012). Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, *136*, 521-573. https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2011.12.004

Karlsen, K., H., Petitta, F., & Ulusoy, S. (2011). A duality approach to the fractional Laplacian with measure data. Publicacions Matematiques, *55*(1), 151-161. https://doi.org/10.5565/PUBLMAT_55111_07

Landes, R. (1981). On the existence of weak solution for quasilinear parabolic initial boundary-value problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, *89*, 217-237. https://doi.org/10.1017/S0308210500020242

Metzler, R., & Klafter, J. (2004). The restaurant at the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A: Maththematical and General*, *37*, 161-208. https://doi.org/10.1088/0305-4470/37/31/R01

Leonori, T., Peral, I., Primo, A., & Soria, F. (2015). Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, *35*(12), 6031-6068. https://doi.org/10.3934/dcds.2015.35.6031

Petitta, F. (2016). Some remarks on the duality method for integro-differential equations with measure data. *Advanced Nonlinear Studies*, *16*(1,) 115-124. https://doi.org/10.1515/ans-2015-5014

Zhang, C., & Zhou, S. (2010). Renormalized and entropy solutions for nonlinear parabolic equations with variable exponents and L^1 data. *Journal of Differential Equations*, *248*(6) 1376-1400. https://doi.org/10.1016/j.jde.2009.11.024

RENORMALIZED SOLUTION FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION

***Nguyen Thanh Long*[1,2]**

[1]*Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam*

[2]*FPT Polytechnic College, Ho Chi Minh City, Vietnam*

Corresponding author: Nguyễn Thanh Long – Email: longnt86@fe.edu.vn

Received: November 20, 2023; Revised: February 04, 2024; Accepted: March 22, 2024

ABSTRACT

The primary objective of this paper is to establish the existence and uniqueness of a nonnegative renormalized solution for a parabolic equation with a nonlinear operator, given nonnegative L^1 data. The approach employed involves approximating the equation with truncated data, demonstrating the convergence of the truncated functions, and deriving specific estimates to obtain the renormalized solutions.

Keywords: existence; nonlinear parabolic equation; renormalized solutions; uniqueness