TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 21, Số 2 (2024): 230-244
Website: https://journal.hcmue.edu.vn

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 21, No. 2 (2024): 230-244
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.2.4030(2024)

ISSN: 2734-9918

Bài báo nghiên cứu

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN LỊCH SỬ HÀM SỐ

Nguyễn Ái Quốc**[*]**, ***Đỗ Dương Anh Thảo***
Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam
[*]*Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: naquoc@sgu.edu.vn*
Ngày nhận bài: 24-11-2023; ngày nhận bài sửa: 02-02-2024; ngày duyệt đăng: 21-02-2024

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một tổng hợp phân tích tri thức luận lịch sử và bổ sung một số kết quả mới về quá trình hình thành và phát triển của hàm số; xác định các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình phát triển và các đặc trưng tri thức luận của hàm số. Nghiên cứu được thực hiện bằng phương pháp phân tích tri thức luận lịch sử trên các tài liệu về lịch sử của Giải tích và Hàm số thực. Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy hàm số phát triển trong 6 giai đoạn bao gồm thời kì Cổ đại, thời kì Trung đại đến cuối thế kỉ XV, thời kì Phục Hưng, thế kỉ XVII, thế kỉ XIX, và từ thế kỉ XX đến nay; các quan niệm hình học, đại số, giải tích, mêtric, tôpô, số học hóa giải tích đã ảnh hưởng mạnh mẽ lên quá trình hình thành và phát triển của hàm số. Ngoài ra, chướng ngại tri thức luận lịch sử của hàm số là sự phân biệt giữa định nghĩa và biểu diễn của hàm số. Kết quả nghiên cứu góp phần cho phân tích tri thức luận lịch sử toán học và làm cơ sở cho các nghiên cứu về những trở ngại của học sinh và sinh viên khi tiếp cận khái niệm hàm số.

Từ khóa: biểu thức giải tích; hàm số; định nghĩa hàm số; phân tích tri thức luận lịch sử; chướng ngại

1. Giới thiệu

Hàm số được sử dụng trong mọi nhánh của toán học, như các phép toán đại số trên số, các phép biến đổi trên các điểm trong mặt phẳng hoặc trong không gian, giao điểm và hợp của các cặp tập hợp… Hàm số là sự thống nhất khái niệm trong toán học. Mối quan hệ giữa các hiện tượng trong đời sống hằng ngày, chẳng hạn như mối quan hệ giữa tốc độ của ô tô và quãng đường đã đi là các hàm số theo thời gian. Khái niệm hàm số có một vai trò quan trọng trong chương trình giảng dạy toán học ở trường. Khái niệm hàm số hiện diện xuyên suốt trong chương trình giáo dục phổ thông môn toán từ bậc tiểu học cho đến trung học phổ thông, nhưng dưới nhiều hình thức khác nhau từ ngầm ẩn cho đến tường minh. Klein và cộng sự quan niệm rằng cần phải đặt khái niệm hàm số vào vị trí trung tâm của việc giảng dạy (Klein et al., 2016) bởi vì, trong tất cả các khái niệm toán học của hai thế kỉ XVIII và XIX, khái niệm này đóng vai trò chủ đạo ở bất cứ nơi nào tư duy toán học được sử dụng. Những định hướng chương trình giảng dạy gần đây nhất nhấn mạnh rõ ràng tầm quan trọng

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc, & Do Duong Anh Thao (2024). An historical – Epistemological analysis of function. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *21*(2), 230-244.

của hàm số (National Council of Teachers of Mathematics, 1989). Tùy thuộc vào quan điểm toán học thống trị, khái niệm hàm số có thể được xem xét theo nhiều cách khác nhau, mỗi cách có những hàm ý giáo dục khác nhau.

Ponte (1992) xem xét một số khía cạnh nổi bật hơn trong lịch sử của khái niệm hàm số, xem xét mối quan hệ của nó với các ngành khoa học khác và thảo luận về việc sử dụng nó trong nghiên cứu các tình huống trong thế giới thực. Luận án của Burnett-Bradshaw (2007) khám phá các quy trình *reification* và *encapsulation*[2] khi chúng áp dụng cho khái niệm hàm và cố gắng xác định cách cả hai quy trình góp phần giải thích sự hình thành khái niệm hàm số. Theo Burnett-Bradshaw, quy trình *reification* về cơ bản là một quy trình ba bước gồm chủ quan hóa, cô đọng hóa và cụ thể hóa. Trong quy trình ba bước này,

> đầu tiên phải có một quy trình được thực hiện trên các đối tượng đã quen thuộc, sau đó ý tưởng biến quy trình này thành một tổng thể chặt chẽ, nhỏ gọn và khép kín hơn sẽ xuất hiện và cuối cùng phải có được khả năng coi thực thể mới này như một đối tượng vĩnh viễn theo đúng nghĩa của nó. (Sfard, 1992, p.64).

Mặt khác, quy trình *encapsulation* về cơ bản là một kiểu trừu tượng phản ánh (chủ quan hóa, phối hợp, đóng gói, khái quát hóa và đảo ngược) trong đó một hành động được áp dụng cho một quy trình để thay đổi nó thành một đối tượng và do đó được đóng gói. Rogers và Pope (2016) giới thiệu khám phá sự phát triển của các ý tưởng toán học trong quá trình hình thành khái niệm hàm số (Rogers & Pope, 2016). Mendes (2021) nghiên cứu nhận thức luận-lịch sử về sự sáng tạo toán học, nhằm mục đích mô tả các phương thức của các giai đoạn sáng tạo này, tập trung vào sự phát triển của phép tính vi phân và khái niệm hàm số.

Theo Sierpinska (1987), chướng ngại tri thức luận liên quan đến việc học hàm số là khái niệm về giới hạn. Murillo Lopez (2008) đưa ra một ví dụ khác về chướng ngại tri thức luận: khái niệm hàm số ngược. Theo Parmentier (1989) và Chauvat (1999), khái niệm đường cong là một trở ngại tri thức luận đối với khái niệm hàm số. Theo họ, đường cong là một trở ngại vì nó thực sự là kiến thức hữu ích để giải các bài toán hình học. Trong một số trường hợp nhất định, đường cong còn giúp giải bài toán liên quan đến hàm số khi chúng ta tìm giao điểm giữa hai đường phương trình. Theo Janvier (1998), một chướng ngại tri thức luận khác liên quan đến khái niệm hàm số là khái niệm thời gian như một biến số. Theo Sierpinska (1992), việc xác định các biến số là một yếu tố có thể gây ra những chướng ngại về tri thức luận vì nhiều học sinh không thấy được tầm quan trọng của việc phân biệt biến nào là phụ thuộc và biến nào là độc lập.

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Nghiên cứu tri thức luận lịch sử

Phương pháp nghiên cứu tri thức luận lịch sử được sử dụng để phân tích các tài liệu trong và ngoài nước về lịch sử của Giải tích nói chung và hàm số nói riêng để làm sáng tỏ quá trình hình thành và phát triển của hàm số. Trong đó, làm rõ nguyên nhân ra đời của hàm

[2] Tạm dịch lần lượt là *Quy trình vật chất hóa* và *Quy trình đóng gói*.

số, các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển của hàm số; xác định chướng ngại cho quá trình phát triển của hàm số, và các đặc trưng tri thức luận của hàm số.

Một phân tích tri thức luận lịch sử hàm số, hay phân tích tri thức luận hàm số là nhằm xác định nguyên nhân và các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển; các đặc trưng tri thức luận của hàm số, cho phép làm cơ sở cho phân tích các trở ngại và sai lầm của người học khi tiếp cận hàm số theo quan điểm didactic Toán. Đó cũng là mục đích của nghiên cứu trình bày trong bài viết này.

2.2. Cơ chế hoạt động và các hình thức thể hiện của khái niệm

Theo Douady (1984,1986), một khái niệm toán học có ba cơ chế hoạt động: Công cụ tường minh, trong đó khái niệm được chủ thể sử dụng, có thể trình bày và giải thích việc sử dụng; Công cụ ngầm ẩn, trong đó khái niệm được chủ thể sử dụng ngầm ẩn, nhưng không thể trình bày và giải thích việc sử dụng chúng; Đối tượng nghiên cứu, trong đó khái niệm được chủ thể nghiên cứu (được định nghĩa, được khai thác các tính chất…).

Theo Chevallard (1991), một khái niệm toán học có thể thể hiện dưới ba hình thức: Khái niệm tiền toán học (protomathématique), trong đó khái niệm không có tên, không được định nghĩa, và hoạt động như một công cụ ngầm ẩn; Khái niệm gần toán (paramathématique), trong đó khái niệm có tên, không được định nghĩa, và là công cụ được vận dụng để giải quyết vấn đề; Khái niệm toán học, trong đó khái niệm có tên, được định nghĩa, vừa là đối tượng nghiên cứu, vừa là công cụ được vận dụng để giải quyết vấn đề.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Phân tích tri thức luận lịch sử hàm số

Tổng quan các giai đoạn phát triển của lịch sử hàm số

Khi khám phá lịch sử về sự hình thành và phát triển của hàm số xuyên suốt từ thời cổ đại đến nay, trước tiên khái niệm hàm số được hiểu thông qua toán học hiện đại và thực ra không có trong toán học cổ đại của người Babylon và người Hi Lạp. Thứ hai, khả năng xuất hiện khái niệm hàm số như một mối quan hệ phụ thuộc và sau đó là mối quan hệ giữa các đại lượng khác nhau. Thứ ba, sự xuất hiện của khái niệm hàm số thông qua các biểu diễn kí hiệu và đồ thị. Thứ tư, có sự đấu tranh trong việc định nghĩa thuật ngữ hàm số từ quan điểm đại số sang việc định nghĩa từ quan điểm dựa trên lí thuyết tập hợp. Cuối cùng, các nhà toán học thiết lập một định nghĩa ở dạng tổng quát: "Một hàm $f : S \rightarrow T$ bao gồm hai tập hợp S và T cùng với một "quy tắc" gán cho mỗi $x \in S$ với một phần tử cụ thể của T, kí hiệu là $f(x)$", được gọi là định nghĩa Dirichlet-Bourbaki (Marsden & Hoffman, 1993, p. 3).

Thời cổ đại (2000 TCN – 1299): Hàm số ngầm ẩn dưới dạng bảng số và lượng giác

Khái niệm hàm số có từ 4000 năm đến khoảng 2000 năm trước Công nguyên, tuy nhiên, không phải tất cả 4000 năm đó đều đáng được ghi nhận. O'Connor và Robertson (2005) khám phá những đóng góp toán học của người Babylon và người Hi Lạp cổ đại đối với sự phát triển của khái niệm hàm số và nhấn mạnh hai điểm chính. Trước tiên, toán học của người Babylon (khoảng 1700 TCN) rất phong phú về các bảng, chẳng hạn như "bảng bình phương của các số tự nhiên, lập phương của các số tự nhiên, các nghịch đảo của các số tự nhiên và bảng các bộ 3 số Pythagore…". Những bảng này chắc chắn xác định các hàm từ tập hợp N đến N, nhưng không có dấu hiệu nào cho thấy người Babylon đang làm bất cứ điều gì khác ngoài việc ghi lại những phát hiện của họ, không tìm kiếm bất kì loại mối quan hệ nào giữa các số và bình phương hoặc lập phương của chúng. Thứ hai, Ptolemy (khoảng năm 150), người đã đóng góp cho toán học của người Hi Lạp, đã khảo sát và tính toán dây cung của một đường tròn, mà ngày nay có thể được coi là có liên quan đến khái niệm hàm lượng giác. Tuy nhiên, điều này không có nghĩa là Ptolemy có bất kì kiến thức thực sự nào về các hàm lượng giác, hoặc thậm chí về khái niệm hàm số (O'Connor & Robertson, 2005). Do đó, có vẻ như các ý tưởng toán học của 3300 năm đầu tiên chỉ giống với quan niệm hiện tại của chúng ta về khái niệm hàm khi nhìn qua lăng kính của toán học hiện đại.

Như vậy, trong thời kì này, khái niệm hàm số chưa có tên gọi hay định nghĩa. Do đó, hình thức thể hiện của hàm số trong giai đoạn này là tiền toán học, tức là không có tên, không được định nghĩa. Nó chỉ xuất hiện như một công cụ ngầm ẩn để giải quyết các bài toán thuộc về thiên văn học, toán học… Trong đó, vấn đề nghiên cứu về sự phụ thuộc được thể hiện trên các bảng số, cho biết mối liên hệ giữa hai tập hợp hữu hạn, rời rạc. Yếu tố đầu tiên của khái niệm hàm số được ưu tiên đề cập là tính "phụ thuộc" giữa hai đại lượng, mặc dù đặc tính phụ thuộc này không xuất hiện tường minh. Tương tự, đặc trưng tương ứng và đặc trưng biến thiên của các đại lượng chỉ thể hiện một cách ngầm ẩn. Như vậy, khái niệm "biến" là yếu tố cơ bản cấu thành khái niệm hàm số chưa xuất hiện. Hơn nữa, sự phụ thuộc giữa hai đại lượng chỉ được mô tả dưới hình thức các bảng số. Như vậy, khái niệm hàm số trong giai đoạn này có các đặc trưng tri thức luận là: khái niệm tiền toán học, công cụ ngầm ẩn, biểu diễn bằng bảng số.

Thời trung đại đến cuối thế kỉ XV (1300 – 1499): Mối quan hệ phụ thuộc

Thời Trung đại, có sự tiếp tục nghiên cứu về sự phụ thuộc giữa hai đại lượng, đặc biệt là các đại lượng liên quan tới chuyển động như: vận tốc, quãng đường, thời gian... Các chuyển động này được nghiên cứu chủ yếu về mặt định tính bằng cách mô tả chiều biến thiên nhưng không đi tới các quan hệ số lượng. Mặt định lượng được đề cập vào cuối thời kì bằng cách mô tả vài giá trị tách rời của hiện tượng và có xu hướng che đậy mặt biến thiên liên tục. Tính phụ thuộc giữa các đại lượng được mô tả bằng lời, nhưng chủ yếu bằng các bảng số hoặc bằng hình học. Như vậy, thời kì này bắt đầu có những nghiên cứu rõ nét hơn về đặc trưng biến thiên, biểu diễn bằng hình học. Điều này đánh dấu một bước tiến về khái niệm hàm số với tư cách biến phụ thuộc. Tuy nhiên, bản thân thuật ngữ "biến thiên" và khái niệm biến chưa xuất hiện một cách rõ ràng. Nicole Oresme (1323-1382) đã tiến gần hơn khái niệm hàm số vào năm 1353 trong một tác phẩm có tựa đề *Tractatus de configurationibus Qualitatum et motum* (Chuyên luận về Cấu hình của Đặc tính và Chuyển động). Ông mô tả "các quy luật tự nhiên là những quy luật đưa ra sự phụ thuộc của một đại lượng này vào một đại lượng khác" (O'Connor & Robertson, 2005). Điều đó được coi là đã thấy trước và tiến gần đến cách trình bày hiện đại về khái niệm hàm số do mối quan hệ phụ thuộc. Oresme đã phát triển một lí thuyết hình học về các vĩ độ của các hình dạng thể hiện các mức độ về cường độ và về độ mở rộng khác nhau[3].

Như vậy, khái niệm hàm số trong thời kì này chịu ảnh hưởng của quan niệm hình học; có đặc trưng tri thức luận là đại lượng biến độc lập, đại lượng biến phụ thuộc, đồ họa, tu từ (mô tả bằng lời), mô hình hóa chuyển động, hình thức thể hiện tiền toán học, cơ chế hoạt động là công cụ ngầm ẩn.

Thời kì Phục hưng (Thế kỉ XVI – XVII)

Trong giai đoạn lịch sử từ thế kỉ XVI -XVII, việc gia tăng mạnh mẽ những phép tính toán học và đặc biệt sự ra đời của các kí hiệu chữ đóng vai trò quyết định đối với sự phát triển sau này của lí thuyết các hàm số.

Công trình của Oresme được nối tiếp bởi công trình của Galileo (1564-1642), trong đó ông nghiên cứu khái niệm về chuyển động. Nghiên cứu về chuyển động cho phép Galileo nghiên cứu mối quan hệ giữa hai đại lượng biến đổi (Malik, 1980), mà cũng có thể được xem là có liên quan đến khái niệm hàm số. Một lần nữa, một phần toán học khác của ông cho thấy ông đã bắt đầu nắm bắt được khái niệm về ánh xạ giữa các tập hợp như thế nào. Năm 1638, ông nghiên cứu bài toán hai đường tròn đồng tâm tâm *O*, đường tròn lớn *A* có đường kính gấp đôi đường tròn nhỏ *B*. Công thức quen thuộc cho chu vi của *A* gấp đôi chu vi của *B*. Nhưng khi lấy bất kì điểm *P* nào trên đường tròn *A* thì *PA* cắt đường tròn *B* tại một điểm. Vì vậy Galileo đã xây dựng một ánh xạ biến mỗi điểm của A thành một điểm của B. Tương tự, nếu *Q* là một điểm trên *B* thì *OQ* cắt đường tròn *A* tại đúng một điểm. Một lần nữa, ông lại có một hàm số, lần này là từ các điểm của *B* đến các điểm của *A*. Mặc dù chu vi của *A* gấp đôi chiều dài chu vi của *B* nhưng chúng có cùng số điểm. Ông cũng tạo ra sự tương ứng 1-1 tiêu chuẩn giữa các số nguyên dương và bình phương của chúng, điều này (theo thuật ngữ hiện đại) tạo ra sự song ánh giữa tập N và một tập con thực sự.

Như vậy, khái niệm hàm số ra đời từ việc giải quyết bài toán hai đường tròn đồng tâm và bài toán chuyển động của Galileo. Trong giai đoạn này, khái niệm hàm số có đặc trưng tri thức luận là tính phụ thuộc, mô hình hóa hiện tượng tự nhiên, tu từ (mô tả bằng lời), ánh xạ, tương ứng 1-1; và vẫn còn chịu ảnh hưởng của quan niệm hình học, mặc dù đã có sự thay đổi quan niệm từ hình học sang đại số.

Gần như cùng thời điểm Galileo nảy ra những ý tưởng về sự phụ thuộc trong hàm số, Descartes (1596-1650) đưa đại số vào hình học trong *La Géométrie* (Hình học). Descartes đã phát biểu rằng một phương trình hai ẩn, được biểu diễn về mặt hình học bằng một đường cong, biểu thị sự phụ thuộc lẫn nhau giữa hai đại lượng biến thiên, cụ thể là "Bằng cách lấy lần lượt và vô hạn các đại lượng khác nhau đối với đường *y* ta cũng có vô hạn các đại lượng

[3] Rất lâu trước khi pháp tính vi tích phân xuất hiện, Nicole Oresme, đã phát triển cái mà ông gọi là vĩ độ của các hình dạng, là cách biểu diễn bằng đồ họa làm sáng tỏ mối liên hệ cơ bản giữa diện tích và cái mà ngày nay chúng ta gọi là tích phân. Trong khóa học giải tích, vĩ độ của các hình dạng có thể được sử dụng để giới thiệu ý tưởng về tích phân dưới dạng diện tích, đồng thời giới thiệu ý tưởng rằng quãng đường đi được là tích phân của vận tốc (Theo Từ điển Cambridge).

khác nhau đối với đường *x*, và như vậy ta có vô hạn các điểm khác nhau, nhờ vào đó ta mô tả được đường cong mong muốn". Ý tưởng về đạo hàm xuất hiện như cách tìm tiếp tuyến tới bất kì điểm nào trên đường cong này. Trong mô tả của Descartes, những yếu tố chủ yếu của khái niệm hàm số đã biểu hiện rõ ràng hơn: "Đường *x*", "đường *y*" là những biến, giá trị của chúng là phụ thuộc. Tuy nhiên, các thuật ngữ "hàm số", "phụ thuộc", "biến thiên" vẫn chưa xuất hiện tường minh (Ponte, 1992).

Như vậy, khái niệm hàm số phát triển, thay đổi ý nghĩa của nó cũng như được định nghĩa chính xác hơn theo thời gian. Khái niệm hàm số ban đầu (ngầm ẩn) đã kết hợp một số ý tưởng của khái niệm hàm số hiện đại, nhưng theo một cách hạn chế hơn nhiều.

Sự giới thiệu đại số rút gọn (syncopated algebra)[4] vào trong các công trình toán học của Viète (1540-1603) trong thế kỉ này cũng được tìm thấy. Trong đại số rút gọn, một nguyên âm được dùng để biểu thị một đại lượng chưa biết và một phụ âm được dùng để biểu thị một đại lượng đã biết hoặc một tham số (Boyer, 1985). Đại số rút gọn này liên quan gián tiếp đến khái niệm hàm vì kí hiệu đại số, hay đúng hơn là cách kí hiệu bằng biểu tượng, là một trong nhiều cách biểu diễn hàm. Toán học được nhận thức như một ngôn ngữ để biểu diễn thực tiễn vật chất của thế giới tự nhiên.

Trong hình học giải tích của Descartes (1637),

> các đường cong được mô tả bằng chuyển động hoặc bằng công thức đề cập đến chuyển động chứ không phải cấu trúc, đã được đưa vào nghiên cứu và mối quan hệ có thể biểu diễn được trong biểu thức và đồ thị của nó hiện đã được chấp nhận làm đối tượng toán (Malik, 1980, p.490).

Vấn đề duy nhất với hình học giải tích vào thời điểm này là nó không có khái niệm về các biến phụ thuộc và biến độc lập (Kleiner, 1989), bắt đầu thực sự chuyển việc biểu diễn tương quan hàm số từ trực giác hình học sang biểu thức giải tích. Dấu hiệu đặc trưng của hàm số thời kì này là sự phụ thuộc lẫn nhau của hai đại lượng biến thiên thể hiện bởi một biểu thức giải tích, trong đó các nhà toán học quan niệm: Hàm số là một biểu thức giải tích. Như vậy, khái niệm hàm số bị thu hẹp vào một phương tiện biểu diễn của nó. Thứ hai, thế kỉ XVII chứng kiến sự khởi đầu của vi tích phân của Newton (1642-1727) và Leibniz (1646-1716), tuy nhiên, vi tích phân này tập trung vào các đường cong hình học chứ không phải các hàm (Kleiner, 1989), và nó đã tạo ra các phép toán áp dụng cho các công thức. Hai ý tưởng lớn này, bao gồm hình học giải tích và vi tích phân, cùng nhau tạo ra một môi trường chín muồi cho sự phát triển của khái niệm hàm số. Cuối cùng, thế kỉ XVII đã chứng kiến việc sử dụng thuật ngữ "hàm" lần đầu tiên của Johann Bernoulli (1667-1748) trong một bức thư gửi Leibniz viết năm 1694, ông đã mô tả hàm số là "một đại lượng được hình thành theo một cách thức nào đó từ các đại lượng không xác định và không đổi" (như được trích dẫn trong O'Connor & Robertson, 2005). Trong một bài báo năm 1698, Johann Bernoulli viết về "hàm của tung độ". Như vậy, hàm số trong giai đoạn này có hình thức thể hiện là khái niệm

[4] Đại số rút gọn (Syncopated algebra) là giai đoạn pha trộn các ý tưởng tu từ và biểu tượng, trong đó một số biểu tượng được sử dụng nhưng không chứa tất cả các đặc điểm của đại số biểu tượng. Kí hiệu đại số rút gọn lần đầu tiên xuất hiện trong tác phẩm *Arithmetica* của Diophantus (thế kỉ thứ 3 sau Công nguyên), tiếp theo là tác phẩm *Brahma Sphuta Siddhanta* của Brahmagupta (thế kỉ VII). (Stallings, 2000)

cận toán học: có tên gọi và chưa được định nghĩa chính thức; có cơ chế hoạt động của hàm số là công cụ ngầm ẩn.

Newton (1642-1727) là một trong những nhà toán học đầu tiên chỉ ra cách phát triển các hàm theo chuỗi lũy thừa vô hạn, do đó cho phép có sự can thiệp của các quá trình vô hạn. Khái niệm hàm được ông nêu ra dưới dạng cơ học và hình học trong cuốn "Phép tính vi phân và các chuỗi vô hạn". Newton chọn thời gian là một khái niệm phổ biến và giải thích những biến phụ thuộc như là những đại lượng sinh ra từ đó theo một cách thức liên tục. Ông sử dụng từ *"fluent"* để chỉ định các biến độc lập, *"relata quantitas"* để chỉ các biến phụ thuộc, và *"genita"* để chỉ các đại lượng thu được bằng cách sử dụng bốn phép tính số học cơ bản. Leibniz (1646-1716) là người đầu tiên sử dụng thuật ngữ hàm số vào năm 1673. Một cách tổng quát, ông sử dụng thuật ngữ hàm số để biểu thị sự phụ thuộc của các đại lượng hình học vào hình dạng của một đường cong. Ông cũng giới thiệu các thuật ngữ hằng, biến và tham số.

Như vậy, trong giai đoạn này, khái niệm hàm số chịu ảnh hưởng của các quan niệm đại số, hình học, hình học giải tích, giải tích, vi tích phân; có các đặc trưng tri thức luận là biểu diễn bằng biểu thức giải tích, chuỗi lũy thừa vô hạn, tính liên tục, biến phụ thuộc, biến độc lập, đường cong.

Thế kỉ XVIII: Định nghĩa hàm số Euler từ quan điểm Đại số

Thế kỉ XVIII thậm chí còn sôi động hơn thế kỉ XVII khi nó chứng kiến sự tách biệt của giải tích khỏi hình học, trong đó khái niệm hàm như một biểu thức đại số được sử dụng thay cho khái niệm biến số, khi nó áp dụng cho các đối tượng hình học (Kleiner, 1989). Điều này được chứng minh trong công trình của Euler (1707-1793), khi đã cố gắng định nghĩa thuật ngữ hàm số từ một quan điểm hoàn toàn đại số vào năm 1748 trong cuốn sách *Introductio in analysin infinitorum* (Giới thiệu về giải tích vô hạn). Trong *Introductio in Analysin infinitorum*, Euler đã đặt khái niệm hàm số là một trong những trụ cột của giải tích và bộ môn này xét cho cùng lấy mục tiêu của nó là xác định hàm số bằng các phương trình, chẳng hạn như phương trình vi phân, phương trình vi phân từng phần, hoặc một lần nữa, phương trình mà ngày nay chúng ta gọi là "hàm số" [. . .] Vào giữa thế kỉ XVIII, chúng ta nhận thấy sự hiện diện của một khái niệm dẫn dắt, đó là hàm số, và giá trị của một phương pháp, đó là phương pháp hàm số. Đồng thời, chúng ta nhận thức được những phản xạ cũ, lén lút hạn chế ý tưởng chung về hàm số bằng cách quy chúng về trạng thái đa thức (Dhombres, 1987).

Năm 1755, Euler xuất bản một cuốn sách khác có tầm ảnh hưởng lớn, đó là *Institutiones calci differentialis*. Trong cuốn sách này, ông đã định nghĩa hàm số theo một cách hoàn toàn tổng quát, đưa ra một định nghĩa hiện đại hơn về hàm số, "Nếu một số đại lượng phụ thuộc vào các đại lượng khác đến mức nếu đại lượng sau thay đổi thì đại lượng trước cũng thay đổi, thì đại lượng trước đó được gọi là hàm số của đại lượng sau". Định nghĩa này áp dụng khá rộng rãi và bao gồm tất cả các cách mà đại lượng này có thể được xác định bằng đại lượng khác. Do đó, nếu x biểu thị một đại lượng thay đổi thì tất cả các đại lượng phụ thuộc vào x theo bất kì cách nào hoặc được xác định bởi x đều được gọi là các hàm của x. Đây có thể là một bước đột phá lớn nhưng sau khi đưa ra định nghĩa rộng rãi này, Euler đã dành cuốn sách này để phát triển phép tính vi phân chỉ sử dụng các hàm giải tích (dẫn theo Ferraro, 2000). Lưu ý rằng với định nghĩa này và các định nghĩa trước đó, cách biểu diễn hàm số gắn liền với việc xác định hàm số. Điều gì xảy ra nếu người ta có thể biểu diễn hàm theo hai cách khác nhau? Vậy thì nó có phải là một hàm số không? Vấn đề đầu tiên trong định nghĩa của Euler về các loại hàm số được chỉ ra vào năm 1780 khi người ta chứng minh rằng một hàm hỗn hợp được cho bởi các công thức khác nhau, đôi khi cũng có thể được cho bởi một công thức duy nhất.

Đối với Euler, khái niệm hàm số là "một biểu thức giải tích biểu diễn mối quan hệ giữa hai biến với đồ thị của nó mà không có góc" (Malik, 1980, p.490). Tuy nhiên, Euler không bao giờ định nghĩa thuật ngữ "biểu thức giải tích", nhưng ngụ ý rằng nó bao gồm các hàm đại số (gồm bốn phép toán hai ngôi, lũy thừa, và căn) và các hàm siêu việt (gồm các hàm mũ, logarit và lượng giác, cũng như đạo hàm và tích phân) (Kleiner, 1989; O'Connor & Robertson, 2005). Ngoài việc định nghĩa thuật ngữ hàm số, chính Euler là người đầu tiên coi vi tích phân như một lí thuyết về hàm số (Kleiner, 1989). Hơn nữa, vi tích phân này không cần một định nghĩa phức tạp hơn định nghĩa mà Euler đã đề xuất, và dường như không ai đặt câu hỏi về định nghĩa của Euler vì nó đủ cho sự tiếp tục phát triển của vi tích phân (Malik, 1980). Vào thời điểm này, thực tế là khái niệm hàm số đã được xác định với khái niệm biểu thức giải tích. Cách biểu diễn này sớm dẫn đến một số mâu thuẫn. Ví dụ, cùng một hàm có thể được biểu diễn bằng nhiều biểu thức giải tích khác nhau. Cách biểu diễn này cũng hạn chế nghiêm trọng các lớp hàm có thể được xem xét. Trong thuật ngữ ngày nay, có thể nói rằng định nghĩa của Euler chỉ bao gồm các hàm giải tích, là tập con bị thu hẹp của lớp hàm liên tục vốn đã nhỏ. Nhận thức được những thiếu sót này, Euler đã đề xuất một định nghĩa thay thế không thu hút được nhiều sự chú ý vào thời điểm đó. Đối với toán học chính thống, việc xác định hàm số bằng các biểu thức giải tích sẽ không thay đổi trong suốt thế kỉ XVIII.

Euler sử dụng hai định nghĩa cho từ "hàm số". Thật vậy, đôi khi "hàm" được coi là quan hệ giữa x và y và được biểu diễn trên mặt phẳng bằng một đường cong được vẽ bằng tay, và đôi khi lại biểu thị một đại lượng được hình thành như một biểu thức giải tích với các hằng số và biến số. Hai định nghĩa cạnh tranh này được tìm thấy trong lịch sử sau này, chẳng hạn như Fourier (1768-1830) sẽ áp dụng định nghĩa đầu tiên trong khi Lagrange (1736-1813) sẽ theo đuổi ý tưởng được thể hiện trong định nghĩa thứ hai. Nhưng Fourier còn đi xa hơn nhiều vì ông xem xét các hàm liên tục theo từng mảnh (Mawfik, 2001). Vì thế, hàm số trong giai đoạn này có hình thức thể hiện khái niệm toán học.

Thế kỉ XVIII đã chứng kiến thêm một cột mốc quan trọng khác trong sự phát triển của khái niệm hàm số, đó là cuộc tranh cãi bài toán về sự dao động của sợi dây, mà những người như Euler, D'Alembert (1717-1783), Daniel Bernoulli và Lagrange (1736-1813) đã đưa ra các lời giải (Kleiner, 1989). Bài toán dây dao động khác với bất kì bài toán nào đã đặt ra trước đây và không có lời giải rõ ràng. Tuy nhiên, nó đã có tác động to lớn đến sự phát triển của khái niệm hàm số do bản chất của bài toán: Một sợi dây đàn hồi có các đầu cố định bị biến dạng thành một hình dạng ban đầu nào đó rồi được thả cho dao động điều hòa. Bài toán ở đây là xác định hàm mô tả hình dạng của sơi dây tại thời điểm *t*. Trong cuộc tranh cãi về các lời giải khác nhau cho bài toán, tất cả đều xoay quanh ý nghĩa của "hàm số". Theo Grattan-Guinness, "Toàn bộ giải tích của thế kỉ 18 đã được xem xét: lí thuyết về hàm số, vai trò của đại số, tính liên tục của trục số thực và sự hội tụ của chuỗi…" (Grattan-Guinness, 1970, p.2).

Vì thế, cơ chế hoạt động của hàm số trong giai đoạn này là công cụ ngầm ẩn được sử dụng để giải quyết bài toán dây rung. Kleiner (1989) chỉ ra rằng kết quả của cuộc tranh cãi này về khái niệm hàm là để mở rộng định nghĩa của Euler cũng như của Bernoulli về hàm số. Giờ đây, các hàm có thể được xác định theo từng khoảng bởi nhiều hơn một biểu thức giải tích phụ thuộc vào khoảng và cũng có thể bao gồm các biểu diễn tự do không nhất thiết phải có biểu thức giải tích. Các nhà toán học thời kì này đều xem hàm số là một biểu thức giải tích. Do đó, đặc trưng tri thức luận của khái niệm hàm số trong giai đoạn này là biểu diễn bằng biểu thức đại số, biểu diễn bằng biểu thức giải tích, biểu diễn với kí hiệu đại số, sự phụ thuộc của một đại lượng vào một đại lượng biến thiên, hình thức thể hiện khái niệm toán học, cơ chế hoạt động công cụ ngầm ẩn; và sự phát triển của khái niệm hàm số chịu ảnh hưởng của quan niệm đại số, giải tích, vi tích phân.

Thế kỉ XIX: Định nghĩa của Dirichlet về hàm số dựa trên sự tương ứng tùy ý

Định nghĩa về hàm số tiếp tục được mở rộng và làm rõ khiến bản chất và ý nghĩa của nó bị thay đổi sâu sắc xuyên suốt thế kỉ XIX. Từ đầu thế kỉ XIX, người ta nói về khái niệm hàm số mà không nhắc gì tới cách biểu diễn giải tích của nó, trong đó, vào năm 1805, Fourier (1768-1830) đã giới thiệu thứ mà ngày nay được gọi là chuỗi Fourier, được sử dụng để biểu diễn một số hàm không liên tục (O'Connor & Robertson, 2005). Sự giới thiệu của chuỗi Fourier có một vài ảnh hưởng đến khái niệm hàm (Kleiner, 1989). Đầu tiên, nó làm cho các biểu diễn giải tích và hình học của các hàm có giá trị như nhau. Điều đó cũng có nghĩa là hai hàm số khác nhau về biểu thức giải tích có thể giống nhau trong một khoảng xác định, nhưng không nhất thiết bên ngoài khoảng này. Ngoài ra, nó còn thách thức các nhà toán học xem lại ý nghĩa của một hàm không liên tục. Những thay đổi này cho phép hình thành và hình thức hóa chủ đề giải tích và kiểm tra lại khái niệm hàm số.

Sự ra đời của chuỗi Fourier cũng nhận lại những lời phê bình từ Dirichlet (1805-1859), Gauss, Abel, và Cauchy (Kleiner, 1989), trong đó Cauchy đề cập đến các vấn đề liên quan đến tính liên tục, hội tụ, tích phân xác định, còn Dirichlet đề cập đến định nghĩa của hàm số. Khi nghiên cứu sự hội tụ của chuỗi Fourier vào năm 1829, Dirichlet nhận thấy cần phải định nghĩa lại một hàm là "*y* là một hàm của *x* nếu với bất kì giá trị nào của *x*, sẽ có một quy tắc cho một giá trị duy nhất của *y* tương ứng với *x* " (Malik, 1980, p.491). Do đó, đối với Dirichlet, các hàm để chỉ một sự tương ứng tùy ý được xác định trong một khoảng, trong khi đối với các nhà toán học trước ông thì các hàm để chỉ các biểu thức giải tích hoặc đường cong (Kleiner, 1989). Định nghĩa của Dirichlet được dùng để làm rõ sự khác biệt giữa định nghĩa của một hàm và sự biểu diễn của một hàm (O'Connor & Robertson, 2005). Nó cũng sinh ra các khái niệm về miền xác định và miền giá trị thông qua ảnh hưởng của không gian mêtric và không gian tô pô, khiến khái niệm hàm được nâng lên thành một khái niệm trừu tượng phức tạp hơn (Malik, 1980). Như với các định nghĩa trước đây về hàm số, định nghĩa của Dirichlet cũng không dễ dàng được chấp nhận bởi Chebychev, Baire, Borel và Levesque. Định nghĩa của Dirichlet đã mở ra "Chiếc hộp Pandora", khi một số định nghĩa khác về hàm số bắt đầu xuất hiện trong suốt phần còn lại của thế kỉ (Kleiner, 1989). Bất chấp thực tế này, định nghĩa của Dirichlet đã khai sinh ra giải tích, một chủ đề bắt nguồn từ vi tích phân (Malik, 1980). Trong giải tích mới này, do định nghĩa của Dirichlet, người ta thấy rằng các quy trình của giải tích không áp dụng cho tất cả các hàm, mà chỉ áp dụng cho một số lớp hàm (Kleiner, 1989). Các nhà toán học như Riemann và Weierstrass bắt đầu thích thú với những những trường hợp ngoại lệ hơn là những quy luật trong giải tích. Vào giữa thế kỉ XIX, Riemann đã mở rộng khái niệm tích phân của Cauchy, và do đó mở rộng lớp các hàm có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier; cái mà ngày nay được gọi là tích phân Riemann. Công trình của ông đã mở ra cánh cửa để nhìn vào sự không liên tục về mặt toán học. Đến năm 1872, Weierstrass đưa ra ví dụ của ông về hàm liên tục không khả vi ở mọi nơi, dẫn đến việc tách hàm liên tục khỏi hàm khả vi trong giải tích, và nói chung dẫn đến "số học hóa giải tích" [5] và sử dụng các phản ví dụ. Thế kỉ XIX có một cột mốc quan trọng cuối cùng: nỗ lực của Baire để trả lời câu hỏi liệu tất cả các hàm số có thể được biểu diễn bằng biểu thức giải tích hay không (Kleiner, 1989). Đối với Baire, một hàm số có thể được biểu diễn bằng biểu thức giải tích nếu "nó có thể được xây dựng từ một biến và hằng số bằng một tập hợp hữu hạn hoặc đếm được của các phép cộng, phép nhân và các phép chuyển sang các giới hạn theo từng điểm" (Kleiner, 1989, p.295). Do đó, bất kì hàm nào bao gồm một biến và hằng số, được tạo ra bằng cách sử dụng bốn phép toán hai ngôi của đại số và các phép toán giải tích, đều có thể được biểu diễn dưới dạng biểu thức giải tích. Từ đó, Baire đã tạo ra sơ đồ phân loại Baire và các hàm số thuộc về sơ đồ này được gọi là hàm số Baire. Sau đó, ông tuyên bố rằng một hàm số có thể được biểu diễn bằng biểu thức giải tích nếu nó thuộc về một trong các lớp Baire.

Như vậy, sự phát triển của khái niệm hàm trong giai đoạn này chịu ảnh hưởng của các quan niệm giải tích, mêtric, tôpô, số học hóa giải tích; có các đặc trưng tri thức luận là biểu diễn bằng chuỗi, biểu diễn bằng biểu thức giải tích, mang tính trừu tượng, có cơ chế hoạt động là công cụ tường minh. Chướng ngại tri thức luận của khái niệm hàm là sự phân biệt định nghĩa của hàm và biểu diễn của hàm.

Thế kỉ XX đến nay: Định nghĩa hàm số của Dirichlet-Bourbaki

Vào đầu thế kỉ XX, lí thuyết hàm là lĩnh vực toán học tập trung vào các phản ví dụ và vào năm 1905, Lebesgue đã chỉ ra rằng không phải tất cả các hàm đều có thể được biểu diễn theo giải tích bằng cách sử dụng các định nghĩa của Baire thông qua việc sử dụng một phản ví dụ (Kleiner, 1989). Hơn nữa, định nghĩa về hàm số của Dirichlet vẫn còn được xem xét kĩ lưỡng vì nó "được một số người (Lebesgue) cho là quá rộng và không có ý nghĩa đối với những người khác (Baire và Borel), nhưng lại được những người khác chấp nhận (Hadamard)" (Kleiner,

[5] "Người ta thường nói rằng Weierstrass "số học hóa giải tích" (một cụm từ mà Felix Klein đặt ra năm 1895), có nghĩa là ông đã giải phóng giải tích khỏi những suy luận hình học và những hiểu biết trực quan rất phổ biến vào thời điểm đó" (Burton, 2003, p.578).

1989, p.296). Thế kỉ XX cũng chứng kiến sự phát triển của các hàm số L^2 , các hàm được tổng quát hóa và lí thuyết phạm trù. Các hàm L^2 tạo thành một không gian Hilbert và cho phép một người làm việc trên các lớp hàm tương đương hơn là trên các hàm riêng lẻ. Ngoài ra, các toán tử trên không gian Hilbert là các hàm có đối số là một hàm. Các hàm suy rộng cung cấp một bối cảnh để phân biệt các đối tượng toán học không phải là các hàm, nhưng mở rộng việc sử dụng chúng trong lí thuyết phương trình vi phân. Lí thuyết phạm trù cho phép khái niệm hàm như một phép ánh xạ giữa các tập hợp trở nên được chấp nhận trong thế kỉ XX này. Đại số và giải tích là những đóng góp chính cho sự phát triển này trong toán học.

Sự phát triển của thế kỉ XX này đã cho phép xuất hiện các định nghĩa hiện đại về hàm số dựa trên lí thuyết tập hợp, chẳng hạn như định nghĩa hàm số của Caratheodory vào năm 1917: hàm số là "một quy tắc tương ứng từ tập hợp *A* đến tập số thực" (Malik, 1980, p.491), và định nghĩa của Bourbaki về hàm vào năm 1939: Hàm là "quy tắc tương ứng giữa hai tập hợp" (Malik, 1980, p.491). Vào giữa thế kỉ XX, "định nghĩa về hàm số của Dirichlet và Bourbaki đã trở thành thuật ngữ trong sách giáo khoa" (Malik, 1980, p. 491). Một ví dụ về thuật ngữ như vậy từ sách giáo trình bậc đại học hiện đang sử dụng là: "Một hàm *f*: $S \to T$ bao gồm hai tập hợp *S* và *T* cùng với một "quy tắc" gán cho mỗi $x \in S$ một phần tử cụ thể của *T*, kí hiệu là $f(x)$ (Marsden & Hoffman, 1993, p.3). Các định nghĩa tương đương với định nghĩa này vẫn đang được sử dụng cho đến ngày nay ở cả trường trung học và đại học; tuy nhiên, sự nhấn mạnh vào loại định nghĩa này có thể phụ thuộc vào giáo viên, chương trình giảng dạy và sách giáo khoa. Ví dụ, định nghĩa trong sách giáo khoa trung học ở một số nước có dạng: "Một hàm số là mối quan hệ giữa đầu vào và đầu ra. Trong một hàm số, đầu ra phụ thuộc vào đầu vào. Có chính xác một đầu ra cho mỗi đầu vào" (Holliday et al., 2003), và định nghĩa này ít phức tạp hơn nhiều so với định nghĩa trước đây. Goursat, vào năm 1923, đã đưa ra định nghĩa của hàm số, mà xuất hiện trong hầu hết các sách giáo khoa ngày nay: "y là một hàm của *x* nếu với mỗi giá trị của *x* tương ứng với một giá trị của y. Ta biểu thị sự tương ứng này bằng phương trình $y = f(x)$".

Như vậy, trong giai đoạn này, sự phát triển của khái niệm hàm số chịu ảnh hưởng của hai quan niệm lớn là đại số và giải tích; khái niệm hàm có các đặc trưng tri thức luận là ánh xạ; sự tương ứng giữa các phần tử của hai tập hợp.

3.2. Nguyên nhân thúc đẩy sự ra đời của hàm số

Phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy khái niệm hàm số được hình thành từ nghiên cứu bài toán hai đường tròn đồng tâm của Galileo và bài toán biểu diễn đường cong của một phương trình hau ẩn của Descartes. Trong bài toán thứ nhất, Galileo đã nhận thức được một song ánh giữa hai tập hợp điểm nằm trên hai đường tròn; và trong bài toán thứ hai, Descartes đã nhận thức được sự phụ thuộc giá trị của một đại lượng vào giá trị của một đại lượng khác.

3.3. Các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển của hàm số

Quá trình hình thành và phát triển của hàm số chịu ảnh hưởng mạnh mẽ của quan niệm hình học trong suốt các thời kì từ Cổ đại, Trung đại, Phục hưng, và thế kỉ XVI. Mở đầu thế kỉ XVII, quan niệm đại số dần dần thay thế quan niệm hình học và ảnh hưởng lên sự phát triển của hàm số cho đến hết nửa đầu thế kỉ XIX thì chuyển giao lại cho quan niệm giải tích, vi tích phân, mêtric, và tôpô. Đặc biệt trong thế kỉ XVIII, quan niệm số học hóa giải tích đã ảnh hưởng mạnh mẽ lên sự phát triển của hàm số, bởi vì trong thời kì này, các nhà toán học bắt đầu đặt lại nền móng vững chắc cho giải tích trên số học thay cho hình học và đại số (Petri & Schappacher, 2007, p.343).

3.4. Chướng ngại tri thức luận của hàm số

Có ba chướng ngại tri thức luận cho quá trình hình thành và phát triển của hàm số, đó là chướng ngại về định nghĩa hàm số, chướng ngại về biểu diễn hàm số, và chướng ngại về sự phân biệt giữa định nghĩa và biểu diễn hàm số. Chướng ngại thứ nhất gắn liền với sự nhận thức về mối liên quan giữa hai đại lượng: đại lượng phụ thuộc và đại lượng độc lập. Chướng ngại thứ hai gắn liền với sự cố gắng định nghĩa hàm số bằng biểu thức giải tích. Chướng ngại thứ ba gắn liền với sự phân biệt giữa định nghĩa và biểu diễn hàm số.

3.5. Các đặc trưng tri thức luận của hàm số

Trong quá trình hình thành và phát triển của hàm số, các đặc trưng tri thức luận được xác định bao gồm: Đặc trưng về *hình thức thể hiện*: khái niệm tiền toán học, khái niệm cận toán học, khái niệm toán học; Đặc trưng về *cơ chế hoạt động*: công cụ ngầm ẩn, công cụ tường minh, đối tượng nghiên cứu; Đặc trưng về *tính độc lập và phụ thuộc*: đại lượng biến phụ thuộc, đại lượng biến độc lập, sự phụ thuộc của một đại lượng vào một đại lượng biến thiên; Đặc trưng về *biểu đạt*: tu từ (mô tả bằng lời), đồ họa, đường cong, biểu diễn bằng biểu thức đại số, biểu diễn bằng biểu thức giải tích, biểu diễn bằng chuỗi vô hạn, biểu diễn với kí hiệu đại số, định nghĩa bằng ánh xạ; Đặc trưng về *sự tương ứng*: sự tương ứng giữa hai tập hợp, sự tương ứng 1-1; Đặc trưng về *mô hình hóa*: mô hình hóa chuyển động, mô hình hóa hiện tượng tự nhiên; Đặc trưng về *trừu tượng hóa*: hàm số mang tính trừu tượng, vì hàm số là sự tương ứng giữa các phần tử của hai tập hợp.

4. Kết luận

Ý tưởng về hàm số đã manh nha ngầm ẩn từ thời Cổ đại, và bắt đầu lộ diện vào thời Trung đại trong nghiên cứu của Oresme khi mong muốn mô tả mối quan hệ phụ thuộc của các đặc tính tự nhiên vào thời gian bằng đồ thị bao gồm hai trục "kinh độ" và "vĩ độ". Ý tưởng đó được thúc đẩy bởi hai nghiên cứu của Galileo về hai đường tròn đồng tâm, và biểu diễn đường cong của một phương trình hai ẩn. Nghiên cứu của Dirichlet về sự hội tụ của chuỗi Fourier vào năm 1829 đã giúp khai sinh định nghĩa gần hoàn thiện đầu tiên của hàm số "*y* là một hàm của *x* nếu với bất kì giá trị nào của *x*, sẽ có một quy tắc cho một giá trị duy nhất của *y* tương ứng với *x* ". Quá trình số học hóa giải tích nhằm thiết lập một nền tảng số học vững chắc cho Giải tích từ giữa thế kỉ XIX đến XX của các nhà toán học đã góp phần hình thành định nghĩa hàm hoàn thiện của Dirichlet và Bourbaki: "Một hàm f: $S \rightarrow T$ bao gồm hai tập hợp S và T cùng với một "quy tắc" gán cho mỗi $x \in S$ một phần tử cụ thể của T, kí hiệu là $f(x)$". Kết quả nghiên cứu tri thức luận lịch sử hàm số xác định được ba chướng ngại tri thức luận của hàm số: định nghĩa hàm số, biểu diễn hàm số, và sự phân biệt giữa định nghĩa và biểu diễn hàm số. Các chướng ngại này sẽ là cơ sở cho các nghiên cứu về tiếp cận hàm số của người học ở bậc phổ thông và đại học.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Boyer, C. B. (1985). *A history of mathematics*. Princeton University Press.

Burnett-Bradshaw, C. S. (2007). *From functions as process to functions as object: a review of reification and encapsulation*. [Thesis for Doctor of Philosophy in Mathematics Education Tufts University]. https://dl.tufts.edu/concern/pdfs/j6731f78v

Chauvat, G. (1999). Courbes et fonctions au collège [Curves and functions in college]. *Petit x, 51*, 23-44. https://publimath.univ-irem.fr/biblio/IGR99012.htm

Chevallard, Y. (1985/1991). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné* [*Didactic transposition, from scholarly knowledge to taught knowledge*]. la pensée sauvage.

Dhombres, J. (1987). Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle. Archaïsme, pédagogie, et syle d'écriture [On an Euler text relating to a functional equation. Archaism, pedagogy and writing style]. *Historia Scientiarum*: *International journal of the Science Society of Japan*, (33), 77-99. https://dl.ndl.go.jp/pid/11023744/1/52

Douady, R. (1984). *French (Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire... Histoire et perspectives sur les mathématiques* [math.HO]. [*Games with frame games and tool-object dialectics in the teaching of Mathematics. An achievement throughout the primary curriculum... History and perspectives on mathematics* [math.HO]]. University of Paris VII. https://theses.hal.science/tel-01250665

Douady, R. (1986). Games with frames and the dialectic tool-object . *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31. https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/

Ferraro, G. (2000). Jeux de cadres et dialectique outil-objet [Functions, Functional Relations, and the Laws of Continuity in Euler]. *Historia Mathematica*, *27*(2), 107-132. http://doi.org/10.1006/hmat.2000.2278

Grattan-Guinness, I. (1970). *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*. M.I.T.

Janvier, C. (1998). The Notion of Chronicle as an Epistemological Obstacle to the Concept of Function. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 79-103. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)80062-5

Klein, F., Menghini, M., & Schubring, G. (2016). *Elementary mathematics from a higher standpoint*. Springer.

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. *The College Mathematics Journal, 20*(4), 282-300. http://doi.org/10.2307/2686848

Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 11*(4), 489-492. http://doi.org/10.1080/0020739800110404

Marsden, J. E., & Hoffman, M. J. (1993). *Elementary classical analysis* (2nd ed.). W. H. Freeman and Company.

Mawfik, N., Boukhssimi, D., & Lamrabet, D. (2001). Genèse historique de la notion de continuité d'une fonction. [Historical genesis of the notion of continuity of a function]. *Bulletin Mathematical Association of Quebec*, *XLI*(1), 31-44. https://www.amq.math.ca/ancien/archives/2001/1/2001-1-part9.pdf

Mendes, I. A. (2021). Historical Creativities for the Teaching of Functions and Infinitesimal Calculus. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *16*(2), em0629. https://doi.org/10.29333/iejme/10876

Murillo Lopez, S. (2008). *Étude d'une pratique ordinaire face à un obstacle didactique: La correction en classe de mathématiques dans le cas de la fonction réciproque* [*Study of an ordinary practice faced with a didactic obstacle: Correction in mathematics class in the case of the reciprocal function*]. [Doctoral thesis, University of Toulouse].

National Council of Teachers of Mathematics. (NCTM) (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics.* NCTM.

O'Connor, J. J. & Robertson, E. F. (2005). History topic: The function concept. In *MacTutuor History of Mathematics.* http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Functions.html

Panza, M. (2007). *Euler's introductio in analysin infinitorum and the program of algebraic analysis: Quantities, functions and numerical partitions* [Euler's Introductio in analysin infinitorum and the program of algebraic analysis: quantities, functions and numerical partitions]. In R. Backer (Ed.), (pp.119-166). The Kendrick Press. https://hal.science/halshs-00162383/

Parmentier, M. (1989). *La naissance du calcul différentiel de Leibniz* [*Leibniz's The birth of differential calculus*]. Vrin.

Petri B., & Schappacher N. (2007). On Arithmetization. In *Goldstein C., Schappacher N., Schwermer J. (eds) The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-34720-0_12

Ponte, J. P.(1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathmeatics Educator, 3*, 3-8. https://www.researchgate.net/publication/251211596_The_history_of_the_concept_of_function_and_some_educational_implications

Rogers, L, & Pope, S. (2016) Working Group report: A brief history of functions for mathematics educators. Adams. G. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 36*(2), 76-81. https://bsrlm.org.uk/wp-content/uploads/2016/11/BSRLM-CP-36-2-14.pdf

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.). *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America. https://www.researchgate.net/publication/242490242_Operational_origins_of_mathematical_objects_and_the_quandary_of_reification-The_case_of_function

Sierpinska, A. (1987). On the relativity of Errors [Sur la relativité des Erreurs. Dans]. In *Proceedings of the 39th CIEAEM meeting* (pp. 70-87). Editions of the University of Sherbrooke.

Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. Dans Harel, G. et Dubinsky, E. (éd.) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). Mathematical Association of America. https://www.researchgate.net/publication/238287243_On_understanding_the_notion_of_function

Stallings, L. (2000). A Brief History of Algebraic Notation. *School Science and Mathematics*, *100*(5), 230-235. http://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb17262.x

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle [The concept of function until the mid-19th century]. In *Fragments of the History of Mathematics, Brochure A.P.M.E.P* (Vol. 1, pp. 7-68). https://www.apmep.fr/IMG/pdf/0041_fragments_d_histoire_des_mathematiques_i_apmep_1981.pdf

Gill, N. S. (2017). *Babylonian Table of Squares*. ThoughtCo. https://www.thoughtco.com/babylonian-table-of-squares-116682

Vnexpress. (2017). Bang luong giac 3700 nam cua nguoi Babylon [3700-year-old Babylonian trigonometry table]. https://vnexpress.net/bang-luong-giac-3700-nam-cua-nguoi-babylon-3633006.html

---

AN HISTORICAL – EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF FUNCTION

Nguyen Ai Quoc*, Do Duong Anh Thao

Saigon University, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: naquoc@sgu.edu.vn*

Received: November 24, 2023; Revised: February 02, 2024; Accepted: February 21, 2024

ABSTRACT

This article presents a synthesis of historical epistemological analysis and adds some new results on the formation and development of functions; identifying concepts influencing the development process and epistemological characteristics of functions. The research was conducted using the method of historical epistemological analysis of documents on the history of Calculus and real functions. The results show that the function developed in six periods: the Ancient period, from the Middle Ages to the end of the 15th century, the Renaissance, the 18th century, the 19th century, and from the 20th century to the present. The conceptions of geometry, algebra, calculus, metric, topology, and arithmetization have strongly influenced the formation and development of functions. In addition, an obstacle to the historical epistemology of functions is the distinction between the definition and representation of functions. The research results contribute to the epistemological analysis of the history of mathematics and further research on the obstacles faced by pupils and students when learning the concept of functions.

Keywords: analytic expression; function; function's definition; historical epistemological analysis; obtacle