



## Bài báo nghiên cứu

# MỘT SỐ MÔ HÌNH HỖ TRỢ DẠY HỌC KHÁI NIỆM NGẪU NHIÊN VÀ Ý TƯỞNG ĐO LƯỜNG XÁC SUẤT

*Tôn Thất Tú\*, Hoàng Thị Thanh Trúc, Nguyễn Đạc Nhiệm*

*Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng, Việt Nam*

*\*Tác giả liên hệ: Tôn Thất Tú – Email: [tttu@ued.udn.vn](mailto:tttu@ued.udn.vn)*

*Ngày nhận bài: 15-12-2023; ngày nhận bài sửa: 13-02-2024; ngày duyệt đăng: 21-02-2024*

### TÓM TẮT

Chương trình giáo dục phổ thông 2018 đã được triển khai giảng dạy ở các trường phổ thông, trong đó thống kê và xác suất là một trong ba mạch kiến thức chính trong chương trình của môn Toán. Mạch kiến thức này thường được xem là khó hiểu đối với học sinh nên người giáo viên cần có những ý tưởng sáng tạo trong việc trình bày bài giảng. Với sự phát triển nhanh chóng của công nghệ thông tin, sự ra đời của các phần mềm và công cụ toán học đã góp phần hỗ trợ giáo viên trong việc tạo ra các bài giảng tương tác sinh động và hấp dẫn. Bài báo này nhằm giới thiệu một số mô hình trực quan trên phần mềm Geogebra để hỗ trợ phân tích khái niệm ngẫu nhiên cũng như ý tưởng về đo lường khả năng xảy ra của các biến cố ngẫu nhiên. Các mô hình động được xây dựng với kết quả được thể hiện ở dạng bảng và biểu đồ nhằm tăng cường lượng thông tin được chuyển tải đến người học.

**Từ khóa:** Chương trình giáo dục phổ thông 2018; mô hình động; Geogebra; tính ngẫu nhiên; Thống kê và Xác suất

### 1. Giới thiệu

Thống kê và xác suất là một trong ba mạch kiến thức chính của môn Toán trong Chương trình giáo dục phổ thông 2018, được trình bày xuyên suốt từ lớp 2 cho đến lớp 12. Theo chương trình môn Toán (Ministry of Education and Training, 2018, p.16), “Thống kê và Xác suất là một thành phần bắt buộc của giáo dục toán học trong nhà trường, góp phần tăng cường tính ứng dụng và giá trị thiết thực của giáo dục toán học. Thống kê và xác suất tạo cho học sinh khả năng nhận thức và phân tích các thông tin được thể hiện dưới nhiều hình thức khác nhau, hiểu bản chất xác suất của nhiều sự phụ thuộc trong thực tế, hình thành sự hiểu biết về vai trò của thống kê như là một nguồn thông tin quan trọng về mặt xã hội, biết áp dụng tư duy thống kê để phân tích dữ liệu”. Ngày nay, công nghệ thông tin (CNTT) phát triển nhanh chóng, tác động đến mọi mặt trong đời sống kinh tế xã hội loài người, trong đó có lĩnh vực giáo dục và đào tạo. Chính vì lý do đó, trong Quyết định số 131/QĐ-TTg ngày

---

*Cite this article as:* Ton That Tu, Hoang Thi Thanh Truc, & Nguyen Dac Nhiem (2024). Some models support teaching the concept of randomness and measurement of probability. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 21(2), 245-255.

25 tháng 01 năm 2022 Thủ tướng chính phủ đã phê duyệt Đề án “Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022-2025, định hướng đến năm 2030” (Prime Minister, 2022). Bộ Giáo dục và Đào tạo hằng năm cũng đều ban hành “Công văn về việc hướng thực hiện nhiệm vụ ứng dụng CNTT, chuyển đổi số và thống kê giáo dục” nhằm đẩy mạnh ứng dụng CNTT trong giảng dạy và học tập ở tất cả các cấp học, bậc học và ngành học đáp ứng yêu cầu công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước. Vai trò của CNTT được thể hiện ở nhiều yếu tố như nền tảng quản lý học tập, phát triển giáo dục mở và học liệu mở, đổi mới phương pháp giảng dạy, tài liệu và nguồn học liệu trực tuyến, tạo môi trường học tập linh động, hỗ trợ tăng cường tương tác, hình thành các cộng đồng học tập trực tuyến và đặc biệt học máy và trí tuệ nhân tạo đã giúp tạo ra các công cụ giáo dục thông minh. Trong nghiên cứu của Pratt và cộng sự (2011), các tác giả cũng đã chỉ ra một số vai trò của CNTT đối với việc dạy và học thống kê và xác suất, bao gồm: hỗ trợ tính toán, khám phá dữ liệu qua các biểu đồ, trực quan hóa các khái niệm trừu tượng, xây dựng các thí nghiệm mô phỏng, hỗ trợ cho việc điều tra và thu thập dữ liệu, cung cấp các môi trường đa dạng hỗ trợ cho sự tham gia và hợp tác giữa người học (Pratt et al., 2011).

Sự phát triển nhanh chóng của CNTT và các thiết bị di động cùng với internet vạn vật đã dẫn đến sự bùng nổ của dữ liệu và đặt ra những thách thức cho con người trong việc tìm hiểu và sử dụng những tri thức từ dữ liệu khổng lồ thu được này. Để nghiên cứu những tri thức ẩn trong dữ liệu thường được xem là không có quy luật này, chúng ta không những cần các kiến thức thống kê và kỹ năng phân tích dữ liệu mà còn phải nắm vững những kiến thức nền tảng về xác suất, trong đó khái niệm về hiện tượng ngẫu nhiên và cách thức đo lường khả năng xảy ra của biến cố đóng vai trò cơ bản. Điều này cho thấy vai trò ngày càng quan trọng của mảng kiến thức xác suất cũng như thống kê trong giáo dục phổ thông. Những mô tả đầu tiên liên quan đến xác suất là về sự ngẫu nhiên được trình bày đơn giản ở nội dung lớp 2 và dần được nâng lên ở các lớp lớn hơn. Về vấn đề đo lường khả năng xảy ra của các biến cố ngẫu nhiên, ý tưởng đầu tiên được thể hiện ở chương trình lớp 6 thông qua khái niệm “xác suất thực nghiệm”.

Theo mô tả Chương trình giáo dục phổ thông 2018, nội dung môn Toán thường mang tính logic, trừu tượng, khái quát. Do đó, để giúp học sinh dễ dàng tiếp cận tri thức và phát triển năng lực, người giáo viên cần đầu tư cho việc chuẩn bị bài giảng cũng như phương pháp dạy học. Mảng kiến thức Thống kê và xác suất thường được xem là khó ngay cả việc diễn giải những khái niệm mở đầu như “ngẫu nhiên là gì” (Le, 2010). Vấn đề này cũng được nghiên cứu và chia sẻ bởi các tác giả Kirschenmann (1972) và Ingram (2024). Nếu giáo viên chỉ truyền thụ kiến thức một chiều và áp đặt suy nghĩ cho học sinh mà không có tình huống và mô hình minh họa sẽ dễ làm cho học sinh hiểu sai vấn đề. Vì vậy, việc xây dựng các mô hình trực quan là một giải pháp hữu ích để giáo viên có thể truyền tải nội dung, giúp học sinh có thể cảm nhận các quy luật và khám phá tri thức mới trong mảng kiến thức này. Các nghiên cứu của nhóm tác giả Phạm Thế Quân (Pham & Tran, 2023) và Nguyễn Thị Thu

Trang (Nguyen & Quach, 2023) cũng đã chỉ ra một số tình huống và biện pháp dạy học mạch kiến thức thống kê và xác suất với sự hỗ trợ của CNTT ở trung học phổ thông. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số phân tích về “sự ngẫu nhiên” cũng như ý tưởng đo lường khả năng xảy ra thông qua một số mô hình được xây dựng trên phần mềm Geogebra.

## **2. Nội dung nghiên cứu**

### **2.1. Một số phân tích về khái niệm ngẫu nhiên**

Theo từ điển Oxford (Dodge, 2003), ngẫu nhiên là khi một sự việc được thực hiện, được chọn... mà không có ai quyết định trước điều gì sẽ xảy ra hoặc không có bất kì khuôn mẫu thông thường nào. Ví dụ, khi ta tung một đồng xu thì rõ ràng ta không thể biết trước kết quả nào xuất hiện. Do đó, kết quả xuất hiện trong thí nghiệm tung một đồng xu là ngẫu nhiên. Khi giáo viên thực hiện tung đồng xu 20 lần độc lập, ta có thể thu được dãy kết quả có dạng:

S N S S N N S N S S S N N N S S S N N N

Ở 12 kết quả cuối cùng, ta thấy có sự lặp lại về kết quả thu được. Điều này có thể gây nghi ngờ cho học sinh về việc kết quả xuất hiện khi tung đồng xu có ngẫu nhiên hay không? Khi đó, giáo viên cần giải thích cho học sinh rằng nếu ta giới hạn quan sát tại mỗi lần tung, kết quả nào xuất hiện là điều hoàn toàn không thể biết trước. Ngoài ra, nếu ta tung tiếp đồng xu thêm một số lần nữa thì hình mẫu như trên (S S S N N N S S S N N N) xuất hiện lại sẽ hiếm khi xảy ra.

Trong thí nghiệm ở trên, nếu ta thay việc “tung đồng xu” bằng việc “đặt đồng xu có mặt sấp hướng lên trên” lên mặt bàn thì rõ ràng kết quả xuất hiện không còn ngẫu nhiên nữa. Do đó, trong giáo trình Lí thuyết xác suất tác giả Gnedenko (Gnedenko, 1962, p.15) trình bày khái niệm về tính chắc chắn, không thể và ngẫu nhiên của một sự kiện như sau:

Một sự kiện mà sự xuất hiện của nó là không thể tránh khỏi bất cứ khi nào tập hợp các điều kiện F được thực hiện được gọi là chắc chắn. Nếu sự kiện A không bao giờ có thể xảy ra khi tập hợp các điều kiện F được thực hiện thì được gọi là không thể xảy ra. Một sự kiện có thể xảy ra hoặc không xảy ra khi tập hợp các điều kiện F được thực hiện, được gọi là ngẫu nhiên.

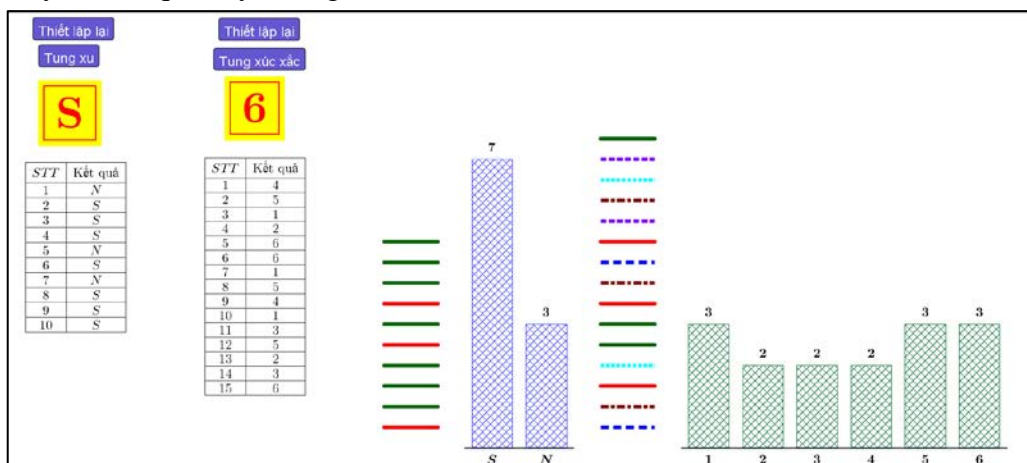
Từ những định nghĩa này, rõ ràng là khi chúng ta nói về sự chắc chắn, tính không thể xảy ra hoặc tính ngẫu nhiên của bất kì sự kiện nào chúng ta sẽ luôn gắn liền sự kiện này với một tập các điều kiện F nào đó. Điều này lại có nghĩa tập hợp các điều kiện F không đủ thông tin để ta kết luận về kết quả nào sẽ xuất hiện khi kết quả được xem là ngẫu nhiên. Với hướng tiếp cận này, ngẫu nhiên chỉ là do chúng ta thiếu thông tin và hiểu biết về hiện tượng quan sát. Vì thế, để có thể đưa ra kết luận chắc chắn hơn về việc sự kiện A có xảy ra hay không ta cần nghiên cứu sâu hơn.

Mặc dù vậy, trong thực tế có một tập hợp lớn các sự kiện mà khi ta thực hiện lặp lại các điều kiện F, dù không biết kết quả nào xuất hiện nhưng có một sự ổn định nhất định về tỉ lệ các kết quả xuất hiện. Do đó, theo từ điển Cambridge về Thống kê (Everitt & Skrondal, 2010), sự kiện (biến cố) ngẫu nhiên không có tính chất đều đặn xác định (các quan sát về chúng không nhất thiết thu được các kết quả giống nhau) nhưng có một mức độ đều đặn nào đó về mặt thống kê (được biểu thị bằng sự ổn định thống kê về mặt tần số của chúng).

Những khó khăn trên cho thấy việc đưa ra định nghĩa “thế nào là ngẫu nhiên” là điều không dễ dàng. Điều này cũng được tác giả Lê Thị Hoài Châu (2010) nhắc đến trong nghiên cứu về những chướng ngại, khó khăn khi dạy học xác suất (Le, 2010). Một số phân tích và bình luận về tính ngẫu nhiên được tác giả Kirschenmann (1972) chia sẻ. Các quan điểm và những hiểu nhầm của giáo viên về sự ngẫu nhiên cũng được tác giả Ingram (2022) nghiên cứu. Do đó, nói chung đối với các giáo trình về xác suất thống kê, các tác giả đều chọn cách mô tả sự ngẫu nhiên thông qua các khái niệm về thí nghiệm (phép thử) ngẫu nhiên, biến cố ngẫu nhiên, biến ngẫu nhiên... và đưa ví dụ minh họa thay vì phân tích chi tiết về khái niệm ngẫu nhiên.

**Mô hình 1. Thí nghiệm ngẫu nhiên về gieo đồng xu và con xúc xắc**

Hình 1 là một mô hình về thí nghiệm ngẫu nhiên gieo một đồng xu và một con xúc xắc cân đối và đồng chất được xây dựng trên phần mềm Geogebra. Khi nhấn vào nút “Tung xu” hoặc “Tung xúc xắc” thì thí nghiệm sẽ bắt đầu tiến hành một lần tung. Kết quả sẽ được hiển thị liên tiếp ngay bên dưới ở dạng bảng tổng hợp. Muốn xóa hết kết quả và thiết lập lại từ đầu thì ta nhấn nút “Thiết lập lại”. Ở mô hình này, chúng tôi chỉ giới hạn 15 kết quả quan sát. Mặc dù bảng kết quả liệt kê rõ ràng, tuy nhiên nhìn chung học sinh khó quan sát trong dãy kết quả có hình mẫu hay quy luật về sự xuất hiện của các mặt hay không. Để khắc phục điều này, ta có thể trực quan hóa kết quả bằng cách sử dụng các đoạn thẳng với các màu khác nhau tùy theo mặt sấp hay ngửa đối với đồng xu và mặt có mấy chấm xuất hiện đối với con xúc xắc. Giáo viên có thể thực hiện lặp lại nhiều lần để cho học sinh xem có thể phán đoán kết quả nào sẽ xuất hiện hay không và có thể phát hiện được hình mẫu nào xuất hiện trong dãy 15 kết quả hay không?



**Hình 1. Mô hình thí nghiệm gieo ngẫu nhiên một đồng xu và một con xúc xắc**

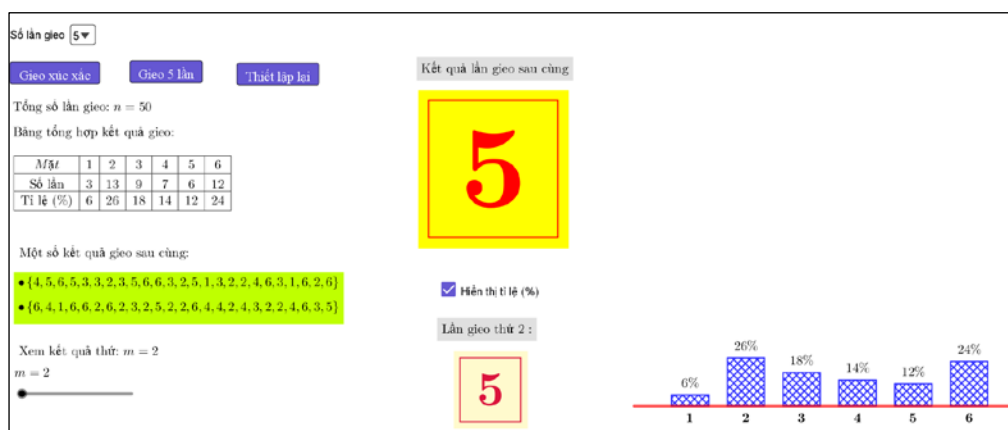
**2.2. Nghiên cứu về hiện tượng ngẫu nhiên**

Một câu hỏi học sinh có thể đặt ra là “Hiện tượng ngẫu nhiên có nghiên cứu được hay không?” Với thí nghiệm ngẫu nhiên ở mô hình 1, học sinh có thể cảm nhận được việc phán đoán trước kết quả nào xuất hiện trong thí nghiệm gieo đồng xu và gieo con xúc xắc là điều hoàn toàn không có cơ sở. Từ cảm nhận này có thể dẫn đến suy nghĩ rằng sự việc diễn ra

ngẫu nhiên thì không thể nghiên cứu được. Tuy nhiên, như đã trình bày ở mục 2.1, các hiện tượng ngẫu nhiên mà ta muốn nghiên cứu đều có tính chất ổn định thống kê (ổn định về tần số). Điều này có nghĩa mặc dù khi ta thực hiện thí nghiệm, kết quả nào xảy ra là điều ta không thể nào biết trước được, nhưng khi ta thực hiện một số lớn lần các thí nghiệm để quan sát thì tỉ lệ xuất hiện các sự kiện (biến cố) mà ta quan tâm sẽ dần ổn định. Điều này cho thấy các hiện tượng ngẫu nhiên vẫn vận động theo những quy luật riêng của nó. Vì vậy, việc nghiên cứu các hiện tượng này là có cơ sở thực hiện. Do đó, vấn đề đối với giáo viên là phải làm cho học sinh cảm nhận được sự ổn định đó, chẳng hạn đối với các thí nghiệm đã được xây dựng ở mô hình 1.

**Mô hình 2. “Quy luật” của các hiện tượng ngẫu nhiên**

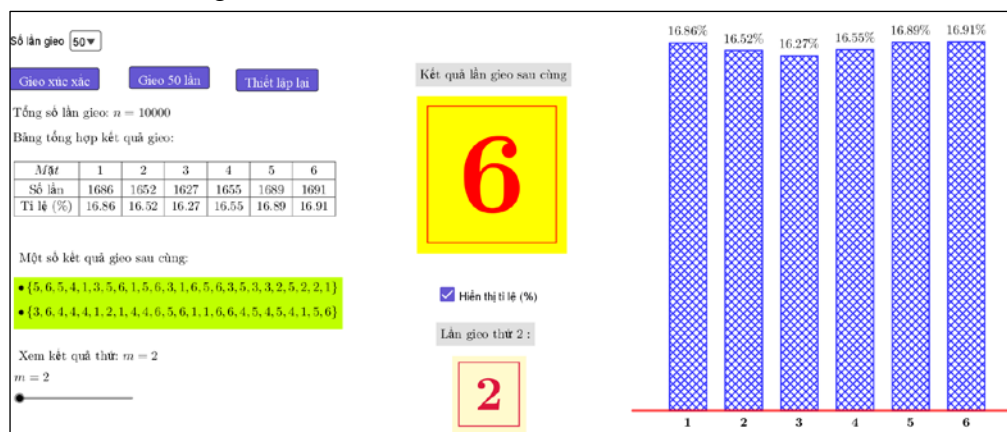
Ta tiếp tục xét thí nghiệm gieo con xúc xắc cân đối và đồng chất với mô hình được xây dựng như trong Hình 2. Giáo viên có thể nhấn nút “Gieo xúc xắc” để gieo một lần, hoặc thay đổi “Số lần gieo” rồi thực hiện gieo với số lần tương ứng. Trong mô hình này, 50 kết quả sau cùng sẽ được liệt kê và ngoài ra, bảng tổng hợp số lần và tỉ lệ xuất hiện các mặt, biểu đồ minh họa cũng được xây dựng. Giáo viên cũng có thể sử dụng thanh trượt để quan sát các kết quả đã xuất hiện. Rõ ràng rằng khi gieo một lần, ta không thể biết trước mặt nào sẽ xuất hiện và tỉ lệ xuất hiện của các mặt sẽ biến đổi rất lớn khi số lần thực hiện lặp lại thí nghiệm nhỏ.



**Hình 2. Kết quả khi gieo con xúc xắc 50 lần**

Chẳng hạn, trong Hình 2 với 50 lần gieo được thực hiện thì việc mặt nào xuất hiện ở mỗi lần là điều không thể đoán trước được. Tỉ lệ xuất hiện của các mặt cũng khác biệt nhau rất rõ nét. Cụ thể, khi thực hiện gieo con xúc xắc 50 lần, số chấm xuất hiện là 1, 2, 3, 4, 5, 6 lần lượt chiếm 6%, 26%, 18%, 14%, 12% và 24%. Do đó, để cho học sinh thấy trực quan khi gieo rất nhiều lần thì tỉ lệ xuất hiện của các mặt dần ổn định hơn giáo viên cần thực hiện lặp lại thí nghiệm rất nhiều lần. Điều này sẽ rất khó khăn cho giáo viên nếu phải thực hiện thủ công việc gieo con xúc xắc, vì thế việc xây dựng các mô hình mô phỏng trên các phần mềm toán là điều cần thiết.

Tiếp theo, giáo viên chỉnh số lần gieo lên 50 lần ở mỗi đợt thực hiện. Sau đó, nhấn vào nút “Gieo 50 lần” nhiều lần để lập thí nghiệm. Mỗi lần nhấn nút gieo, các kết quả sẽ được liên tục cập nhật vào bảng tổng hợp cũng như biểu đồ cột minh họa. Điều này cho học sinh thấy được sự biến động của các tỉ lệ xuất hiện các mặt.



Hình 3. Kết quả khi gieo con xúc xắc 10000 lần

Kết quả thu được khi ta gieo con xúc xắc 10000 lần có dạng như Hình 3. Lúc này, ta có thể thấy tỉ lệ xuất hiện của các mặt đã ổn định hơn và có vẻ chúng có xu hướng xấp xỉ nhau. Ở phần biểu đồ cột, giáo viên có thể cho phép hiển thị tỉ lệ hoặc số lượng các mặt xuất hiện tùy theo mục đích phân tích. Với kết quả được minh họa trực quan như vậy, học sinh có thể dễ dàng cảm nhận được về “sự ổn định” mà chúng ta đã đề cập ở trên. Tuy nhiên, để thuyết phục hơn giáo viên có thể nhấn vào nút “Thiết lập lại” và thực hiện lặp lại có các thí nghiệm một vài lần giúp học sinh cảm nhận rõ nét về sự ổn định này. Giáo viên cũng cần phân tích cho học sinh thấy mặc dù khi lặp lại các thí nghiệm, tỉ lệ xuất hiện của các mặt có sự biến động nhưng nhìn chung chúng có xu hướng ổn định theo nghĩa giá trị của chúng xấp xỉ nhau.

### 2.3. Sự cần thiết về việc nghiên cứu các yếu tố ngẫu nhiên

Nhìn chung sự hiểu biết của mỗi cá nhân nói riêng và của con người nói chung về các sự vật, sự việc diễn ra trong cuộc sống có thể xem như “một hạt nước giữa cả một đại dương”. Khi xây dựng các mô hình cổ điển trong vật lí người ta thường bỏ qua các yếu tố “không biết trước được” tác động vào, chẳng hạn lực cản của không khí, ma sát phát sinh khi vật di chuyển, sự thay đổi bất ngờ của các yếu tố trong hệ quan sát (dây treo bị đứt, vật co giãn vì nhiệt...). Do đó, nếu có thể nghiên cứu được các hiện tượng ngẫu nhiên tác động vào hệ thống thì điều này sẽ giúp ta xây dựng được các mô hình phù hợp hơn với thực tế. Hơn nữa, con người luôn ước mơ có thể tìm ra những quy luật về những hiện tượng mà họ không biết nó có khả năng xảy ra hay không. Chẳng hạn, một người nông dân quan tâm hôm nay trời mưa hay nắng, một nhà đầu tư muốn tìm hiểu ngày mai giá cổ phiếu chuyển động như thế nào, một nhân viên bán hàng mong rằng hôm nay sẽ có nhiều khách, những người sống ở các vùng hay xảy ra động đất lo lắng khi nào sẽ xuất hiện đợt động đất tiếp theo và cường

độ như thế nào, ngân hàng muốn biết hành vi giao dịch của khách hàng tại cây ATM có đáng ngờ hay không... Vì vậy, việc nghiên cứu các yếu tố ngẫu nhiên có ý nghĩa quan trọng, giúp ta hiểu biết hơn về thế giới xung quanh, cải thiện các công cụ và mô hình, góp phần nâng cao chất lượng cuộc sống.

**2.4. Ý tưởng đo lường khả năng xảy ra**

Đối với những hiện tượng ngẫu nhiên có sự ổn định về thống kê (ổn định về tỉ lệ xuất hiện) như vậy, ta không đơn giản chỉ nói rằng kết quả xuất hiện của chúng là ngẫu nhiên mà còn có thể ước tính về mặt định lượng cơ hội (khả năng) xảy ra của nó. Câu hỏi đặt ra là làm sao để đo lường khả năng xảy ra của các hiện tượng (các sự kiện, các biến cố) ngẫu nhiên này. Rõ ràng rằng khi quan sát hai biến cố trong cùng một thí nghiệm, nếu ta lặp lại thí nghiệm nhiều lần mà số lần biến cố nào xuất hiện nhiều hơn thì một cách hợp lí, ta sẽ xem biến cố đó có “khả năng xảy ra” nhiều hơn. Sự chênh lệch số lượng xuất hiện càng nhiều thì niềm tin của chúng ta về kết luận đó càng được củng cố. Tuy nhiên, nếu sự chênh lệch này không đáng kể thì kết luận như vậy chưa đáng tin cậy vì kết quả còn phụ thuộc vào yếu tố “may rủi”.

**Mô hình 3. Yếu tố chi phối khả năng xảy ra**

Ta tiếp tục nghiên cứu thí nghiệm gieo một con xúc xắc cân đối với mô hình được xây dựng như Hình 4. Gọi  $A_i$  là biến cố số chấm xuất hiện ở mặt trên cùng của con xúc xắc lớn hơn  $i, i = \overline{1,5}$ . Gọi  $n$  là số lần thực hiện thí nghiệm, trong đó có  $n_i$  lần xuất hiện biến cố  $A_i$  và đặt  $f_i = n_i / n, i = \overline{1,5}$ . Ta có bảng số liệu thống kê qua các lần lặp lại dãy thí nghiệm.

**Bảng 1. Số lần và tỉ lệ xuất hiện biến cố  $A_2$  và  $A_4$**

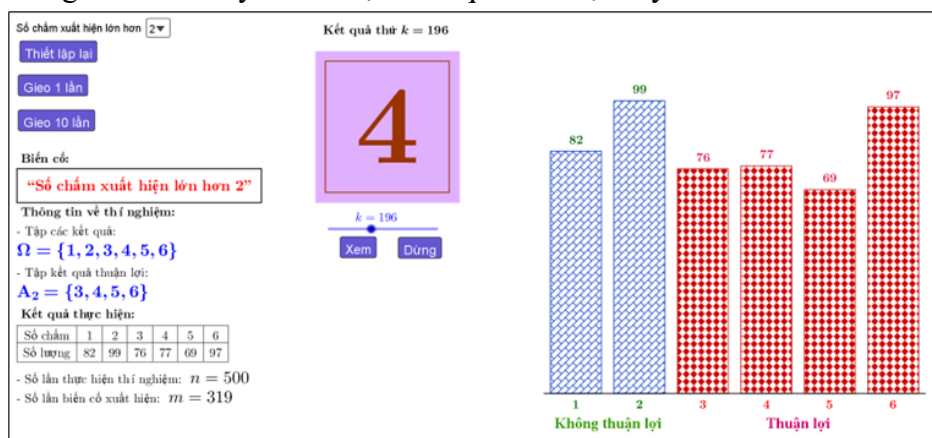
$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$		$n = 500$		$n = 1000$	
$n_2 = 17$	$n_4 = 7$	$n_2 = 40$	$n_4 = 12$	$n_2 = 71$	$n_4 = 41$	$n_2 = 132$	$n_4 = 67$	$n_2 = 319$	$n_4 = 166$	$n_2 = 686$	$n_4 = 339$
$f_2 = 0,85$	$f_4 = 0,35$	$f_2 = 0,8$	$f_4 = 0,6$	$f_2 = 0,71$	$f_4 = 0,41$	$f_2 = 0,66$	$f_4 = 0,335$	$f_2 = 0,638$	$f_4 = 0,332$	$f_2 = 0,686$	$f_4 = 0,339$

Từ Bảng 1 có thể thấy với số lần lặp lại thí nghiệm ( $n$ ) thay đổi ta luôn có  $n_2 > n_4$  hay  $f_2 > f_4$ . Điều này cho ta niềm tin rằng cơ hội xuất hiện của biến cố  $A_2$  nhiều hơn so với cơ hội xuất hiện biến cố  $A_4$ . Để thành lập Bảng 1, giáo viên có thể sử dụng mô hình ở Hình 4, thực hiện số lần thí nghiệm cần thiết và thay đổi lựa chọn “Số chấm xuất hiện lớn hơn” ở góc trên cùng phía trái. Tiếp theo, ta quan sát số lần  $n_3$  xuất hiện biến cố  $A_3$  và số lần  $m_3$  xuất hiện biến cố “số chấm xuất hiện nhỏ hơn 4” (gọi là biến cố  $B_3$ ) với số thí nghiệm thực hiện khác nhau, ta thu được bảng số liệu như ở Bảng 2. Bảng này cho thấy sự chênh lệch tương đối  $|n_3 - m_3| / n$  giữa số lần xuất hiện biến cố  $A_3$  và  $B_3$  là khá nhỏ, đặc biệt khi số thí nghiệm  $n$  lớn. Do đó, ta rất khó kết luận biến cố nào có khả năng xảy ra nhiều hơn và trong trường hợp này, ta có xu hướng nghiêng về phán đoán “cơ hội xuất hiện của hai biến cố này là như nhau”.

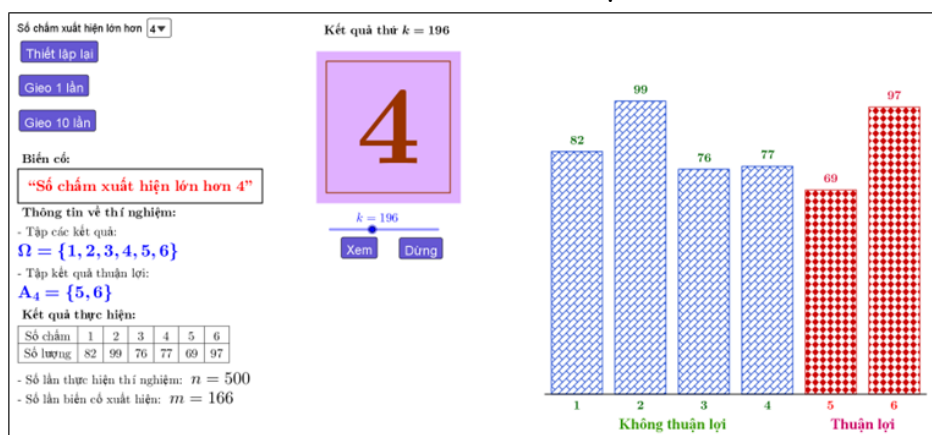
**Bảng 2. Số lần xuất hiện biến cố  $A_3$  và  $B_3$**

$n = 20$		$n = 50$		$n = 100$		$n = 200$		$n = 500$		$n = 1000$	
$n_3 = 7$	$m_3 = 13$	$n_3 = 23$	$m_3 = 27$	$n_3 = 52$	$m_3 = 48$	$n_3 = 97$	$m_3 = 103$	$n_3 = 242$	$m_3 = 258$	$n_3 = 511$	$m_3 = 489$
$ n_3 - m_3  / n = 0,3$		$ n_3 - m_3  / n = 0,08$		$ n_3 - m_3  / n = 0,04$		$ n_3 - m_3  / n = 0,03$		$ n_3 - m_3  / n = 0,032$		$ n_3 - m_3  / n = 0,022$	

Tuy nhiên, một câu hỏi người học có thể đặt ra là “Vì sao cơ hội xuất hiện của biến cố  $A_2$  lại lớn hơn  $A_4$ ?”. Để lí giải cho điều này, ta có thể quan sát Hình 4 và Hình 5 ở phần biểu đồ cột. Rõ ràng rằng trong số các lần xuất hiện biến cố  $A_2$  và  $A_4$  các kết quả thuận lợi cho biến cố  $A_2$  có số lượng nhiều hơn. Cụ thể, tập các kết quả thuận lợi cho biến cố  $A_2$  là  $\{3, 4, 5, 6\}$  trong khi tập kết quả thuận lợi cho biến cố  $A_4$  là  $\{5, 6\}$ . Nói như thế, số lượng các kết quả thuận lợi cho biến cố xảy ra có ảnh hưởng đến cơ hội (xác suất hay khả năng) xảy ra của biến cố đó. Trong trường hợp này, ta có thể thấy hai giá trị này có xu hướng cùng tăng hoặc cùng giảm. Để cho học sinh có thể cảm nhận điều này rõ nét hơn, giáo viên có thể sử dụng mô hình 3, thay đổi biến cố  $A_i$  bằng cách thay đổi giá trị ở phần “Số chấm xuất hiện lớn hơn” trong mô hình và yêu cầu học sinh quan sát sự thay đổi của biểu đồ để nhận xét.



**Hình 4. Biến cố “Số chấm xuất hiện lớn hơn 2”**



**Hình 5. Biến cố “Số chấm xuất hiện lớn hơn 4”**



Từ ý tưởng này, một cách hợp lí theo quan điểm cổ điển (Tran et al., 2023) xác suất xảy ra biến cố  $A$  trong thí nghiệm có  $n(\Omega)$  hữu hạn kết quả đồng khả năng với  $n(A)$  kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$  được kí hiệu là  $P(A)$  và được định nghĩa:  $P(A) = n(A) / n(\Omega)$ . Do đó, theo quan điểm này, ta có  $P(A_2) = 4/6 = 2/3$ ,  $P(A_4) = 2/6 = 1/3$  và  $P(A_3) = P(B_3) = 3/6 = 1/2$ . Số đo khả năng xảy ra của các biến cố  $A_2, A_4, A_3$  và  $B_3$  phù hợp với các suy luận mà ta đã trình bày ở trên. Nếu ta căn cứ dựa trên số liệu thực nghiệm thì ta thu được khái niệm xác suất thực nghiệm (Tran et al., 2021), được định nghĩa bằng tỉ số giữa số lần xuất hiện biến cố và số lần lặp lại thí nghiệm.

Nhìn chung, xác suất được tính theo quan điểm cổ điển và xác suất thực nghiệm của cùng một biến cố sẽ khác nhau. Điều này có thể gây ra thắc mắc ở học sinh là một biến cố lại có thể có hai xác suất xảy ra khác nhau. Ở đây, ta cần làm rõ rằng xác suất thực nghiệm có thể thay đổi khi ta tiến hành lặp lại thí nghiệm hoặc thay đổi số lượng thí nghiệm thực hiện. Tuy nhiên, do tính ổn định nên khi số lượng thí nghiệm tăng lên thì xác suất thực nghiệm sẽ ở rất gần xác suất được tính theo quan điểm cổ điển. Điều này có thể thấy thông qua bảng 1, khi  $n$  tăng lên thì các xác suất thực nghiệm  $f_2, f_4$  có xu hướng sẽ nằm ở gần hơn các giá trị xác suất  $P(A_2) = 2/3$  và  $P(A_4) = 1/3$  tương ứng. Tuy nhiên, ta cần tránh kết luận khi  $n$  tăng lên thì “chắc chắn” xác suất thực nghiệm sẽ ở gần hơn xác suất theo quan điểm cổ điển vì sự ngẫu nhiên của kết quả xuất hiện khi ta thực hiện thí nghiệm. Chẳng hạn ở bảng 1, xác suất thực nghiệm  $f_2$  khi  $n = 200$  lại “tốt hơn” khi  $n = 500$  tương ứng.

### 3. Kết luận và kiến nghị

Trong bài báo này, chúng tôi đã trình bày một số phân tích về khái niệm ngẫu nhiên, xây dựng ba mô hình trên phần mềm Geogebra để hỗ trợ việc dạy học trong các tình huống khi giáo viên muốn minh họa sự ngẫu nhiên, tính quy luật trong các hiện tượng ngẫu nhiên và ý tưởng về đo lường xác suất của một biến cố. Các kết quả được thể hiện ở dạng bảng tóm tắt và biểu đồ nhằm tăng cường lượng thông tin chuyển tải đến người học. Công nghệ thông tin nói chung và các phần mềm toán học nói riêng có vai trò quan trọng trong việc hỗ trợ giáo viên toán xây dựng các mô hình trực quan trong quá trình dạy học nhằm giúp học sinh dễ dàng tiếp cận với các tri thức, thấy được sự hợp lí trong các khái niệm, kết luận và từ đó kích thích niềm đam mê đối với lĩnh vực Toán học. Tuy nhiên, để có thể ứng dụng CNTT hiệu quả, người giáo viên cần tâm huyết, đầu tư thời gian và công sức để nâng cao chuyên môn nghiệp vụ, kĩ năng sử dụng CNTT cũng như các phần mềm ứng dụng. Các mô hình trong bài báo này được nhóm tác giả chia sẻ miễn phí trên blog cá nhân ở trang chủ của Geogebra tại địa chỉ <https://www.geogebra.org/m/tprcquzq> với mong muốn như mục đích của chính phần mềm miễn phí Geogebra được nhiều giáo viên có thể tiếp cận và sử dụng.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Dodge, Y. (2003). *The Oxford Dictionary of Statistical Terms*. Oxford University Press.
- Everitt, B. S., & Skrondal, A. (2010). *The Cambridge Dictionary of Statistics* (4th ed.). Cambridge University Press.
- Gnedenko, B. V. (1962). *The Theory of Probability*. Chelsea Publishing Company.
- Ingram, J. (2024). Randomness and probability: exploring student teachers' conceptions. *Mathematical Thinking and Learning*, 26(1), 1-19. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.2016029>
- Kirschenmann, P. (1972). Concepts of Randomness. *Journal of Philosophical Logic*, 1(3/4), 395-414.
- Le, T. H. C. (2010). Nhung chuong ngai, kho khan trong day hoc khai niem xac suat [Obstacles and difficulties in teaching probability concepts]. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 24, 115-121.
- Ministry of Education and Training. (2018). *Chuong trinh giao duc pho thong mon Toan [General education program in Mathematics]*. Vietnam Ministry of Education and Training.
- Nguyen, T. T. T., & Quach, T. S. (2023). Mot so bien phap day hoc chu de Thong ke va Xac suat cho hoc sinh lop 6 voi su ho tro cua cong nghe thong tin [Some methods of teaching statistics and probability topics for 6th grade students with the support of information technology]. *The Vietnam Institute of Educational Sciences*, 19, 27-34.
- Pham, T. Q., & Tran, T. (2023). Ung dung cong nghe thong tin trong mot so tinh huong day hoc mach kien thuc thong ke va xac suat o trung hoc pho thong [Application of information technology in some situations of teaching statistics and probability in high school]. *Vietnam Journal of Education*, 23(5), 7-11.
- Pratt, D., Davies, N., & Connor, D. (2011). The Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 97-107). [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0\\_13](https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_13)
- Prime Minister. (2022). *Quyết định số 131/QĐ-TTg (ban hành ngày 25 tháng 01 năm 2022 về việc phê duyệt Đề án "Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022-2025, định hướng đến năm 2030")* [Decision No. 131/QĐ-TTg (issued on January 25, 2022 on approving the Project "Enhancing the application of information technology and digital transformation in education and training in the period 2022 - 2025, oriented to year 2030")]. Vietnam Government.
- Tran, N. D., Bui, V. N. (Chief Editor), Vu, Q. C., & Tran, D. H. (Editor). (2021). *Toan 6 (tap 2) [Math 6 (Vol. 2)]*. Vietnam Education Publishing House.
- Tran, N. D. (Chief Editor), Vu, Q. C., & Tran, D. H. (Editor), Nguyen, C., Nguyen, V. H., Ngo, H. L., & Huynh, N. T. (2023). *Toan 8 (tap 2) [Math 8 (Vol. 2)]*. Vietnam Education Publishing House.

**SOME MODELS SUPPORT TEACHING THE CONCEPT OF RANDOMNESS  
AND MEASUREMENT OF PROBABILITY**

***Ton That Tu\*, Hoang Thi Thanh Truc, Nguyen Dac Nhiem***

*University of Danang – The University of Science and Education, Vietnam*

*\*Corresponding author: Ton That Tu – Email: ttu@ued.udn.vn*

*Received: December 15, 2023; Revised: February 13, 2024; Accepted: February 21, 2024*

**ABSTRACT**

*The 2018 Vietnam General Education Curriculum has been implemented in high schools, in which statistics and probability are one of the three main strands of knowledge in the Math curriculum. This knowledge is often considered difficult for students to understand, so teachers are encouraged to be creative in presenting lessons. With the rapid development of information technology, the advent of software and mathematical tools has contributed to supporting teachers in creating lively and attractive interactive lessons. This article aims to introduce some visual models on Geogebra software to assist in analyzing the concept of randomness as well as ideas about measuring the probability of random events. Dynamic models are built with results presented in tables and graphs to enhance student learning.*

**Keywords:** 2018 Vietnam General Education Curriculum; dynamic model; Geogebra; randomness; Statistics and Probability