XÂY DỰNG TRƯỜNG ĐỊNH CHUẨN CHO ĐƠN CỰC SO(8) TRONG KHÔNG GIAN TRỰC GIAO CHÍN CHIỀU

PHAN NGỌC HƯNG*, THỚI NGỌC TUẤN QUỐC**

TÓM TẮT

Bằng cách mở rộng thừa số pha trong không gian chín chiều trực giao, chúng tôi xây dựng trường định chuẩn cho đơn cực SO(8) và chứng tỏ đơn cực này đáp ứng hai điều kiện Dirac.

Từ khóa: trường định chuẩn, đơn cực SO(8), không gian 9 chiều.

ABSTRACT

Developing gauge field for so(8) monopole in orthogonal nine-dimensional space

By generalizing the phase factor in orthogonal nine-dimensional space, the researchers constructed gauge field for SO(8) monopole, and proved that monopole satisfy two Dirac conditions.

Keywords: gauge field, SO(8) monopole, nine-dimensional space.

1. Mở đầu

Khái niệm đơn cực từ lần đầu tiên được Dirac đưa ra năm 1931 trong nỗ lực đối xứng hóa hệ phương trình Maxwell, theo đó, tồn tại một "đơn cực từ" đóng vai trò là nguồn sinh từ trường [1]. Dirac đưa ra hai điều kiện cho đơn cực từ (hai điều kiện Dirac):

i. Trường đơn cực phải có tính đối xứng cầu đối với miền không gian xung quanh đơn cực.

ii. Thông lượng từ trường gửi qua một mặt kín bất kì bao quanh đơn cực phải khác không.

Sau sự xuất hiện của đơn cực từ Dirac, nhiều mô hình đơn cực khác được xây dựng trong các không gian với số chiều khác nhau, trong đó có đơn cực Yang được xây dựng trong không gian trực giao 5 chiều [3], [4]. Mô hình đơn cực SU(2) của Yang là sự mở rộng trực tiếp của mô hình đơn cực U(1) của Dirac, dựa trên việc mở rộng khái niệm thừa số pha cho không gian 5 chiều.

Ở một cách tiếp cận khác, khi nghiên cứu về sự liên hệ giữa bài toán dao động tử điều hòa 16 chiều và bài toán Coulomb 9 chiều, nhóm tác giả Lê Văn Hoàng đề xuất phép biến đổi Hurwitz mở rộng để biến đổi giữa hai bài toán này và nhận thấy phép biến đổi từ bài toán dao động tử điều hòa 16 chiều về bài toán Coulomb 9 chiều làm xuất hiện một thế đơn cực SO(8). [2]

Tuy nhiên, cho đến nay, chúng tôi vẫn chưa thấy công trình nào khảo sát về đơn cực này trên khía cạnh xây dựng trường gauge như với các đơn cực Dirac và đơn cực

* ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: hung.catalunya@gmail.com*

** ThS, Trường THPT Năng khiếu, ĐHQG TPHCM

Yang. Do đó, trong công trình này, chúng tôi sẽ xây dựng lý thuyết gauge cho đơn cực SO(8) trong không gian 9 chiều theo phương pháp luận của Yang, cụ thể như sau:

i. Khử kì dị dây Dirac của đơn cực trong không gian 9 chiều bằng cách chia không gian thành hai miền phủ lên nhau, mỗi miền không chứa kì dị.

ii. Xây dựng thừa số pha mở rộng cho mỗi miền này.

iii. Xây dựng bộ thế đơn cực và bộ cường độ trường đơn cực trong mỗi miền từ thừa số pha.

iv. Kiểm tra hai điều kiện Dirac trên bộ cường độ trường tìm thấy.

2. Đơn cực SO(8) trong không gian trực giao 9 chiều

Trong công trình [2], đơn cực SO(8) được đưa ra với bộ thế đơn cực gồm 7 thành phần:

$$\begin{aligned}
A_\mu^1 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(-x_2, x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5, x_8, -x_7, 0\right)\\
A_\mu^2 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(x_3, x_4, -x_1, -x_2, x_7, -x_8, -x_5, x_6, 0\right)\\
A_\mu^3 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(x_4, -x_3, x_2, -x_1, x_8, x_7, -x_6, -x_5, 0\right)\\
A_\mu^4 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(-x_5, -x_6, -x_7, x_8, x_1, x_2, x_3, -x_4, 0\right)\\
A_\mu^5 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(x_6, -x_5, x_8, x_7, x_2, -x_1, -x_4, -x_3, 0\right)\\
A_\mu^6 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(x_7, -x_8, -x_5, -x_6, x_3, x_4, -x_1, x_2, 0\right)\\
A_\mu^7 &= \frac{g}{r(r+x_9)}\left(-x_8, -x_7, x_6, x_5, -x_4, -x_3, x_2, x_1, 0\right)
\end{aligned} \qquad (1)$$

với A_μ^j là các thành phần thế đơn cực lấy theo thành phần tọa độ $\mu(\mu = 1,2,...,9)$ trong không gian 9 chiều trực giao và theo vi tử thứ j của nhóm SO(8), g là từ tích của đơn cực. Bộ thế này tồn tại kì dị dây Dirac là phần âm của trục Ox_9. Các giá trị của j từ 1 đến 7, trong khi nhóm Lie SO(8) có đến 28 vi tử, nên theo chúng tôi, bộ thế này chưa phải là bộ thế hoàn chỉnh, hoặc nhóm đối xứng thật sự của đơn cực này không phải là SO(8). Ngoài ra, nếu đơn cực SO(8) này đúng là sự mở rộng của đơn cực Dirac và đơn cực Yang thì sẽ có một lớp nghiệm nữa ứng với kì dị dây Dirac là phần dương của trục Ox_9.

Khi mở rộng bài toán đơn cực lên không gian 9 chiều, chúng tôi chú ý một điểm sau đây của nhóm đối xứng: nhóm đối xứng của đơn cực từ Dirac là *U(1)* đẳng cấu với nhóm cầu S^1, nhóm đối xứng của đơn cực Yang là *SU(2)* đẳng cấu với nhóm cầu S^3. Điều này gợi ý cho chúng tôi lựa chọn nhóm đối xứng của bài toán là nhóm S^7 trong bài toán 9 chiều. Tuy nhóm S^7 không phải là nhóm Lie và đại số không đóng kín, nhưng lại đẳng cấu với nhóm quotient *SO(8)/SO(7)* nên ta có thể xem nhóm *SO(8)* là nhóm đối xứng mở rộng của đơn cực này.

3. Mở rộng thừa số pha và biểu diễn yếu tố *T*

Để thuận tiện cho việc mở rộng cho đơn cực trong không gian 9 chiều, trước hết ta nhắc lại cách xây dựng trường gauge cho đơn cực Dirac. Để khử kì dị, ta chia không gian thành hai miền phủ lên nhau:

$$\begin{aligned} &R_a : 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} + a, \\ &R_b : \frac{\pi}{2} - a < \theta \le \pi, \qquad (0 < a < \pi/2) \end{aligned} \tag{2}$$

Trong hai miền đó, thế đơn cực có dạng:

$$\begin{aligned} &A_r^{(a)} = A_\theta^{(a)} = 0; A_\varphi^{(a)} = \frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} = \frac{g}{r}\tan\frac{\theta}{2}, \\ &A_r^{(b)} = A_\theta^{(b)} = 0; A_\varphi^{(b)} = -\frac{g(1+\cos\theta)}{r\sin\theta} = -\frac{g}{r}\cot\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Trong miền R_a, thừa số pha được viết tường minh:

$$\Phi^{(a)}_{(P+dP)P} \approx 1 - \frac{ieg}{\hbar c}(1-\cos\theta)d\varphi \approx [\exp\left(\frac{2ieg}{\hbar c}d\varphi\right)]^{-p(\theta)} \tag{4}$$

với $p(\theta) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta)$.

Ta xét một hàm theo tọa độ $T(r,\theta,\varphi) = \exp\left(\frac{2ieg}{\hbar c}\varphi\right)$. Hàm này xác định đơn trị ở mọi nơi trừ trục z do điều kiện lượng tử hóa của từ tích $\frac{2eg}{\hbar c} = n$. Thừa số pha trong miền này có thể được viết lại dưới dạng:

$$\Phi^{(a)}_{(P+dP)P} = \left(T_{(P+dP)}T_P^{-1}\right)^{-p(\theta)}. \tag{5}$$

Tương tự, thừa số pha viết cho trường đơn cực trong miền R_b:

$$\Phi^{(b)}_{(P+dP)P} = \left(T^{-1}_{(P+dP)}T_P\right)^{p(\theta)-1}. \tag{6}$$

Dựa trên cách xây dựng cho đơn cực trong không gian 3 chiều trên, chúng tôi mở rộng cho trường hợp không gian 9 chiều. Chúng tôi chọn hệ tọa độ cầu $(r,\theta,\varphi_1,...,\varphi_7)$ để mô tả không gian 9 chiều trực giao, liên hệ với hệ tọa độ Euclide 9 chiều $(x_1,x_2,...,x_9)$ theo quy luật:

$$x_9 = r\cos\theta; x_j = r\sin\theta h_j(\varphi_1,...,\varphi_7) \tag{7}$$

với $j = 1,2,...,8$. Trong đó $h_j(\varphi_1,...,\varphi_7)$ chỉ phụ thuộc vào 7 góc phương vị $(\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_7)$ và thỏa mãn tính chất:

$$h_1^2 + h_2^2 + ... + h_8^2 = 1. \tag{8}$$

Để gỡ bỏ kì dị dây, chúng tôi chia không gian 9 chiều thành 2 miền phủ lên nhau:

$$R_a : 0 \le \theta < \frac{\pi}{2} + \alpha$$
$$R_b : \frac{\pi}{2} - \alpha < \theta \le \pi \tag{9}$$

trong đó, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Trong hai miền R_a và R_b, thừa số pha của trường đơn cực được mở rộng trực tiếp từ các phương trình (5-6):

$$\Phi^{(a)}_{(P+dP)P} = \left(T_{(P+dP)}T_P^{-1}\right)^{-p(\theta)},$$
$$\Phi^{(b)}_{(P+dP)P} = \left(T^{-1}_{(P+dP)}T_P\right)^{p(\theta)-1}. \tag{10}$$

trong đó, yếu tố T là một yếu tố thuộc nhóm đối xứng mở rộng $SO(8)$. Trong biểu diễn ma trận, T là một ma trận là một ma trận 8×8 và thỏa mãn tính chất trực giao của nhóm này $TT^C = T^C T = I$. Tính chất này cho thấy, nếu T đáp ứng được yêu cầu của bài toán đơn cực thì ma trận chuyển vị của nó, T^C cũng thỏa mãn yêu cầu đặt ra. T và T^C ứng với hai biểu diễn trong mỗi miền không gian R_a và R_b.

Trong phần phủ lên nhau của hai miền chia, $R_{ab} : \frac{\pi}{2} - \alpha \le \theta \le \frac{\pi}{2} - \alpha$, ta chứng minh được:

$$T^{-1}_{P+dP}\Phi^{(a)}_{(P+dP)P}T_P = \Phi^{(b)}_{(P+dP)P}. \tag{11}$$

Phương trình này cho ta một phép biến đổi gauge giữa hai trường đơn cực trong miền phủ lên nhau. Một cách tương tự như trong trường hợp 3 chiều, khi mở rộng lên không gian 9 chiều, T bắt buộc chỉ phụ thuộc vào 7 biến số góc $(\varphi_1,...,\varphi_7)$, do đó các thành phần ma trận của T phải là các tổ hợp tuyến tính bậc nhất của các tọa độ từ $x_1 \to x_8$ chia cho $r\sin\theta$. Biểu diễn sau đây của nhóm SO(8) cùng các phương trình (10) xác định hoàn toàn trường đơn cực α:

$$T^{\alpha} = \frac{1}{r\sin\theta}\begin{pmatrix} x_1 & -x_2 & x_3 & x_4 & -x_5 & -x_6 & x_7 & x_8 \\ x_2 & x_1 & -x_4 & x_3 & x_6 & -x_5 & -x_8 & x_7 \\ -x_3 & x_4 & x_1 & x_2 & -x_7 & x_8 & -x_5 & x_6 \\ -x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 & x_8 & x_7 & x_6 & x_5 \\ x_5 & -x_6 & x_7 & -x_8 & x_1 & x_2 & -x_3 & x_4 \\ x_6 & x_5 & -x_8 & -x_7 & -x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ -x_7 & x_8 & x_5 & -x_6 & x_3 & -x_4 & x_1 & x_2 \\ -x_8 & -x_7 & -x_6 & -x_5 & -x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Trường đơn cực β được xác định hoàn toàn nhờ vào các phương trình (10), và biểu diễn T^{β} là ma trận chuyển vị của ma trận T^{α}.

4. Các thành phần thế của trường đơn cực

Trong phần này chúng tôi chỉ thực hiện các tính toán trên miền R_b. Đối với các trường trong miền R_a, ta có thể sử dụng phép biến đổi gauge (11) dựa trên các kết quả tính được trong miền R_b.

Thừa số pha của trường đơn cực $SO(8)$ trong miền R_b được xác định bởi phương trình (10). Khai triển đến gần đúng bậc thấp nhất vế phải của phương trình này:

$$\Phi^{(b)}_{(P+dP)P} \approx 1 + q(\theta)\left.\frac{\partial T}{\partial P}\right|_P T_P^{-1} dP \tag{13}$$

với $q(\theta) = 1 - p(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)$. Mặt khác, thừa số pha theo định nghĩa được tính bởi:

$$\Phi_{(P+dP)P} \approx 1 - \frac{1}{2g} A^{ab}_{\mu}\xi_{ab} dx^{\mu} \tag{14}$$

trong đó, ξ_{ab} là vi tử của nhóm đối xứng của đơn cực. Đối với trường hợp đơn cực SO(8), $(\xi_{ab})_{jk} = \delta_{aj}\delta_{bk} - \delta_{ak}\delta_{bj}$ với $a = 1,2,...,8$, $b = a+1, a+2,...,8$ và δ_{bk} là kí hiệu Kronecker.

Bằng cách thay các giá trị tường mình của T^{α} vào (13) và đồng nhất với (14), chúng tôi thu được bộ thế của trường đơn cực α trong miền R_b. Tương ứng với 28 vi tử của nhóm SO(8), chúng tôi thu được 28 thành phần thế viết trong không gian đại số Lie. Với nhóm đối xứng của đơn cực là nhóm cầu S^7, các vi tử được chọn có dạng ξ_{1b} với $b = 2,3,...,8$, ta thu được bộ thế đơn cực

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{12} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_2, x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5, x_8, -x_7, 0\right)\\
A_\mu^{13} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_3, x_4, -x_1, -x_2, -x_7, x_8, x_5, -x_6, 0\right)\\
A_\mu^{14} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_4, -x_3, x_2, -x_1, x_8, x_7, -x_6, -x_5, 0\right)\\
A_\mu^{15} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_5, -x_6, -x_7, x_8, x_1, x_2, x_3, -x_4, 0\right)\\
A_\mu^{16} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_6, x_5, x_8, x_7, -x_2, x_1, -x_4, -x_3, 0\right)\\
A_\mu^{17} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_7, x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, -x_1, -x_2, 0\right)\\
A_\mu^{18} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_8, -x_7, x_6, x_5, -x_4, -x_3, x_2, -x_1, 0\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

Các thành phần còn lại ứng với 21 vi tử của nhóm con bất biến $SO(7)$ của nhóm $SO(8)$.

Một cách tương tự, sử dụng T^β thay vì T^α, chúng tôi cũng thu được bộ thế của trường đơn cực β trong miền R_b:

$$
\begin{aligned}
A_\mu^{12} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_2, -x_1, x_4, -x_3, x_6, -x_5, x_8, -x_7, 0\right)\\
A_\mu^{13} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_3, x_4, x_1, -x_2, -x_7, x_8, x_5, -x_6, 0\right)\\
A_\mu^{14} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_4, -x_3, x_2, x_1, x_8, x_7, -x_6, -x_5, 0\right)\\
A_\mu^{15} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_5, -x_6, -x_7, x_8, -x_1, x_2, x_3, -x_4, 0\right)\\
A_\mu^{16} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(x_6, x_5, x_8, x_7, -x_2, -x_1, -x_4, -x_3, 0\right)\\
A_\mu^{17} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_7, x_8, -x_5, x_6, x_3, -x_4, x_1, -x_2, 0\right)\\
A_\mu^{18} &= \frac{g}{r(r-x_9)}\left(-x_8, -x_7, x_6, x_5, -x_4, -x_3, x_2, x_1, 0\right)
\end{aligned} \tag{16}
$$

5. Cường độ trường đơn cực và kiểm chứng hai điều kiện Dirac

Cường độ trường đơn cực được xây dựng theo công thức

$$F_{\mu\nu}^{ab} = \partial_\mu A_\nu^{ab} - \partial_\nu A_\mu^{ab} + \frac{1}{2g} f_{(ab)(cd)(jk)} A_\mu^{cd} A_\nu^{jk}, \tag{17}$$

trong đó, $f_{(ab)(cd)(jk)}$ là các hằng số cấu trúc của nhóm $SO(8)$ được xác định từ hệ thức giao hoán của các vi tử của nhóm này: $\left[\xi_{ab},\xi_{cd}\right]=if_{(ab)(cd)(gh)}\xi_{gh}$.

Bằng cách thay các giá trị tương ứng của các thế đơn cực ứng với các trường α và β, ta có thể thu được biểu thức của tất cả các thành phần của cường độ trường α và β tương ứng.

Để kiểm tra hai điều kiện Dirac, trong không gian 9 chiều trực giao chúng tôi chọn hệ tọa độ Descartes với các vector đơn vị cơ sở là (e_{μ_j}) $(\mu_j=1,2,...,9)$. Trong hệ tọa độ này, chúng ta sẽ tính các thành phần cường độ trường dọc theo các trục tọa độ theo công thức:

$$F_{\mu_1}=\varepsilon_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_8\mu_9}F_{\mu_2\mu_3}F_{\mu_4\mu_5}F_{\mu_6\mu_7}F_{\mu_8\mu_9}, \tag{18}$$

trong đó, $\varepsilon_{\mu_2\mu_3\cdots\mu_8\mu_9}$ là tensor hạng 8 hoàn toàn phản xứng với quy ước $\varepsilon_{12345678}=1$, $\mu_1,\ \mu_2,...,\mu_9=1,2,...,9$. Bằng cách sử dụng ngôn ngữ lập trình Mathematica, chúng tôi đã kiểm tra trên tất cả các bộ cường độ trường có thể, và thu được kết quả:

$$F_\mu^{(\alpha)}=3g^4\frac{x_\mu}{r^9} \tag{19}$$

Do đó, vector cường độ trường đơn cực α trong không gian chín chiều có dạng:

$$\vec{F}_\mu^{(\alpha)}=3g^4\frac{x_\mu e_\mu}{r^9}\equiv 3g^4\frac{\vec{r}}{r^9}. \tag{20}$$

Với trường đơn cực β, chúng tôi cũng thu được biểu thức có dạng tương tự:

$$\vec{F}_\mu^{(\beta)}=-3g^4\frac{x_\mu e_\mu}{r^9}\equiv -3g^4\frac{\vec{r}}{r^9}. \tag{21}$$

Từ đây, ta dễ dàng nhận thấy các vector cường độ trường hướng dọc theo bán kính, nói cách khác và độ lớn tỉ lệ nghịch với r^8, do đó điều kiện Dirac thứ nhất về tính đối xứng cầu được đảm bảo. Mặt khác, thông lượng gửi qua mặt cầu quanh đơn cực được tính theo công thức:

$$\Gamma_8=\oint\vec{F}d\vec{S}=\oint FdS=\pm 3g^4S_8, \tag{22}$$

trong đó, S_8 là diện tích mặt cầu 9 chiều bao quanh đơn cực, dấu + ứng với trường đơn cực α và dấu - ứng với trường đơn cực β. Biểu thức trên chứng tỏ thông lượng này không bị triệt tiêu, tức điều kiện Dirac thứ hai đã được thỏa mãn.

6. Kết luận:

Như vậy bằng cách mở rộng khái niệm thừa số pha, chúng tôi đã xây dựng được các trường đơn cực của đơn cực SO(8) như một mở rộng tự nhiên của đơn cực Dirac và đơn cực Yang cho không gian 9 chiều trực giao. Cách xây dựng biểu thức tường mình của các trường đơn cực cũng được chúng tôi chỉ ra. Đồng thời, chúng tôi cũng đã chứng tỏ đơn cực này hoàn toàn thỏa mãn các điều kiện Dirac.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dirac P (1931), "Quantised Singularities in the Electromagnetic Field", *Proc. Roy. Soc. A* **22**, pp. 60-71.
2. Le Van Hoang, Nguyen Thanh Son, Phan Ngoc Hung, (2009), "A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator", *J. Phys. A* **42,** 175204 (8pp).
3. Yang C. N., (1978), "Generalization of Dirac's monopole to SU(2) gauge fields", *J. Math. Phys.* **19**, pp. 320-328.
4. Yang C. N., (1978), "SU2 Monopole harmonic", *J. Math. Phys.* **19(12)**, pp. 2622 – 2627.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 19-12-2014; ngày phản biện đánh giá: 25-12-2014; ngày chấp nhận đăng: 12-02-2015)

THIẾT KẾ HỆ THỐNG THỦY NHIỆT…

(Tiếp theo trang 38)

8. Tomoko Kasuga , Masayoshi Hiramatsu , Akihiko Hoson , Toru Sekino , and Koichi Niihara (1998), "Formation of Titanium Oxide Nanotube", *Langmuir*, 14(12), pp.3160–3163.
9. Xiaobo Chen and Samuel S. Mao (2007), Titanium Dioxide Nanomaterials: Synthesis, Properties, Modifications, and Applications", *Chem. Rev.*,107, pp.2891−2959.
10. Yan Li Wang, Shun Tan, Jia Wang, Zhi Jin Tan, Qiu Xia Wu, Zheng Jiao, Ming Hong Wu (2011), "The gas sensing properties of TiO2 nanotubes synthesized by hydrothermal method", *Chinese Chemical Letters*, 22, pp.603–606.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 29-12-2014; ngày phản biện đánh giá: 27-01-2015; ngày chấp nhận đăng: 12-02-2015)