TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 16, Số 1 (2019): 73-84
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
EDUCATION SCIENCE
Vol. 16, No. 1 (2019): 73-84

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

MỘT NGHIÊN CỨU THỰC NGHIỆM VỀ CÁC KHÓ KHĂN LIÊN QUAN ĐẾN VIỆC HỌC KHÁI NIỆM TẬP MỞ, TẬP ĐÓNG TRONG KHÔNG GIAN MÊTRIC

Nguyễn Ái Quốc, Lê Minh Tuấn
Trường Đại học Sài Gòn
Tác giả liên hệ: Email: nguyenaq2014@gmail.com

Ngày nhận bài: 14-5-2018; ngày nhận bài sửa: 12-7-2018; ngày duyệt đăng: 17-01-2019

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả thực nghiệm về các khó khăn của sinh viên của ba trường: Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Đại học Sài Gòn và Đại học Đồng Nai khi giải quyết kiểu nhiệm vụ xét tính đóng, mở của một tập trong không gian mêtric. Các khó khăn này sinh ra bởi chướng ngại tri thức luận gắn liền với việc xây dựng khái niệm tập mở, tập đóng như quá trình khái quát hóa khoảng mở, đóng của $\mathbb{R}$ và bởi ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế Toán đại học đối với tập mở và tập đóng.

Từ khóa: chướng ngại tri thức luận, khó khăn, không gian mêtric, tập đóng, tập mở.

1. Mở đầu

1.1. Định nghĩa tập mở, tập đóng trong ba thể chế Toán đại học

Tập mở, tập đóng là hai khái niệm cơ bản của không gian mêtric và không gian tôpô. Hai khái niệm này được tiếp cận bằng ba cách khác nhau trong thể chế Toán đại học của ba trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHSPTPHCM), Đại học Sài Gòn (ĐHSG) và Đại học Đồng Nai (ĐHĐN).

- ***Thể chế Toán của Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh***

Trong thể chế Toán của ĐHSPTPHCM, khái niệm tập mở và tập đóng chỉ xuất hiện trong giáo trình Tôpô đại cương và được định nghĩa theo lân cận:

"Một tập hợp con U của $\mathbb{R}$ được gọi là mở nếu với mỗi $x \in U$, tồn tại một số thực dương ε sao cho $O_\varepsilon(x) \subset U$." (Trần Tráng, 2005, tr. 44)

"Một tập hợp con của $\mathbb{R}$ được gọi là đóng nếu nó là phần bù của một tập hợp con mở trong $\mathbb{R}$." (Trần Tráng, 2005, tr. 48)

- ***Thể chế Toán của Đại học Sài Gòn***

Trong thể chế Toán của ĐHSG, khái niệm tập mở và tập đóng xuất hiện trong giáo trình "Giải tích hàm" và được định nghĩa theo hình cầu mở:

"Cho không gian mêtric (X, d). Với tập con $A \subset X$, ta nói A là một tập mở (trong X) nếu ứng với mỗi $x \in A$, tồn tại $r > 0$ sao cho $B(x,r) \subset A$. Nếu $X \setminus A$ là một tập mở, ta nói A là một tập đóng (trong X). (Đặng Đức Trọng, 2011, tr. 10)

- ***Thể chế Toán của Đại học Đồng Nai***

Trong thể chế Toán của ĐHĐN, khái niệm tập mở và tập đóng xuất hiện trong giáo trình “Cơ sở lí thuyết hàm và Giải tích hàm” và được định nghĩa theo phần trong:

“ Cho A là một tập con của không gian mêtric X. Ta nói A là tập mở nếu $\overset{0}{A} = A$.

Hay có thể nói A mở khi và chỉ chi $A \subseteq \overset{0}{A}$.

Ta nói tập con A là đóng nếu $X \setminus A$ là mở.” (Nguyễn Văn Khuê, 2001, tr. 18)

1.2. Một số ghi nhận và giả thuyết nghiên cứu

- ***Ghi nhận thực tế***

Việc xây dựng khái niệm tập mở, tập đóng như quá trình khái quát hóa của các khoảng mở, khoảng đóng của đường thẳng thực □ trong không gian mêtric có thể dẫn đến một số khó khăn về việc hiểu hai khái niệm này. Thật vậy, trong hai tháng 9 và 10/2017, Nguyễn Ái Quốc (2018a) đã tiến hành một thực nghiệm khảo sát dưới dạng phỏng vấn trực tiếp trên 10 sinh viên năm thứ ba ngành Sư phạm Toán của Trường ĐHSPTPHCM, ĐHSG, ĐHĐN và Đại học Khoa học Tự nhiên về định nghĩa khái niệm tập mở. Kết quả khảo sát cho thấy ở các sinh viên này có ba cách xác định một tập mở trong không gian mêtric: định nghĩa hình thức, sử dụng khái niệm biên, và tập mở được thể hiện bằng hợp các quả cầu mở. Các quan niệm này ở sinh viên khá chênh lệch so với các định nghĩa chính thức.

- ***Kết quả phân tích tri thức luận***

Mặt khác, qua phân tích tri thức luận lịch sử, Nguyễn Ái Quốc (2018a) xác định được một đặc trưng quan trọng trong quá trình xây dựng khái niệm tập mở, tập đóng:

Đặc trưng về cấp độ thể hiện khái niệm: Cấp độ cụ thể trên đường thẳng thực, cấp độ khái quát trong không gian Euclide *n* chiều, cấp độ trừu tượng hóa trong không gian Lesbesgue, không gian mêtric và không gian tôpô, tiên đề hóa trong không gian các lân cận và trong không gian tôpô.

Từ đó, Nguyễn Ái Quốc (2018) xác định chướng ngại tri thức luận đối với SV khi lần đầu tiếp cận khái niệm tập mở, tập đóng: sự khái quát khái niệm tập mở từ đường thẳng thực vào không gian Euclide *n* chiều, và từ không gian Euclide *n* chiều sang không gian tôpô trừu tượng và không gian mêtric tổng quát.

- ***Kết quả phân tích thể chế Toán***

Phân tích thể chế Toán của ba trường trên cho thấy sự tồn tại năm kiểu nhiệm vụ (KNV) liên quan đến tập mở, tập đóng như sau:

+ $T_{\text{CMM-ĐN}}$: Chứng minh tập mở dựa trên định nghĩa;

+ $T_{\text{CMĐ-ĐN}}$: Chứng minh tập đóng dựa trên định nghĩa;

+ $T_{\text{XTĐM-ĐN}}$: Xét tính đóng, mở của một tập bằng định nghĩa;

+ $T_{\text{XĐM-KNLQ}}$: Xét tính đóng, mở dựa trên các khái niệm liên quan;

+ $T_{CMĐL}$: Chứng minh định lí và hệ quả.

Kết quả phân tích mối quan hệ thể chế Toán của ba trường đối với tập mở, tập đóng cho thấy cả ba thể chế quan tâm nhiều đến KNV $T_{CMĐL}$, và hầu như không quan tâm đến KNV $T_{XTĐM-ĐN}$. Hơn nữa, trong giáo trình của ba trường, KNV $T_{XTĐM-ĐN}$ chỉ được trình bày liên quan đến các tập không phải là các ***tập cụ thể.***

Trong thể chế Toán của Trường ĐHSPTPHCM, kết quả phân tích cho thấy KNV $T_{CMĐL}$ chiếm số đa số (73,2%) trong tổng số 26 ví dụ (VD) và bài tập (BT), trong khi đó KNV $T_{XTĐM-ĐN}$ và $T_{XĐM-KNLQ}$ xuất hiện rất ít, 3,8% tại ĐHSPTPHCM, 36,4% tại ĐHSG, và 30,8% tại ĐHĐN. Hơn nữa, hai KNV này hầu hết là khảo sát tính đóng, mở của một tập trừu tượng trong không gian mêtric tổng quát.

Bảng 1. *Các KNV liên quan tập mở, tập đóng trong thể chế Toán ĐHSPTPHCM*

KNV	**VD**	**BT**	**Tổng (%)**
$T_{CMM-ĐN}$: Chứng minh tập mở dựa trên định nghĩa	0	3	3/26 (11,5%)
$T_{CMĐ-ĐN}$: Chứng minh tập đóng dựa trên định nghĩa	0	3	3/26 (11,5%)
$T_{XTĐM-ĐN}$: Xét tính đóng, mở của một tập bằng định nghĩa	0	0	0/26 (0%)
$T_{XĐM-KNLQ}$: Xét tính đóng, mở dựa trên các khái niệm liên quan	0	1	1/26 (3,8%)
$T_{CMĐL}$: Chứng minh định lí và hệ quả	9	10	19/26 (73,2%)

Trong thể chế Toán của Trường ĐHSG, kết quả phân tích giáo trình cho thấy KNV $T_{CMĐL}$ chiếm số đa số (31,8%) trong tổng số 22 VD và BT, trong khi đó KNV $T_{XTĐM-ĐN}$ xuất hiện không đáng kể (9,1%). (Bảng 2)

Bảng 2. *Các KNV liên quan tập đóng, tập mở trong thể chế Toán ĐHSG*

KNV	VD	BT	Tổng (%)
$T_{CMM-ĐN}$: Chứng minh tập mở dựa trên định nghĩa	1	3	4/22 (18,2%)
$T_{CMĐ-ĐN}$: Chứng minh tập đóng dựa trên định nghĩa	0	3	3/22 (13,6%)
$T_{XTĐM-ĐN}$: Xét tính đóng, mở của một tập bằng định nghĩa	2	0	2/22 (9,1%)
$T_{XĐM-KNLQ}$: Xét tính đóng, mở dựa trên các khái niệm liên quan	2	4	6/22 (27,3%)
$T_{CMĐL}$: Chứng minh định lí và hệ quả	4	3	7/22 (31,8%)

Trong thể chế Toán của Trường ĐHĐN, kết quả phân tích giáo trình cho thấy KNV $T_{CMĐL}$ chiếm số đa số (73,2%) trong tổng số 26 VD và BT, trong khi đó KNV $T_{XTĐM-ĐN}$ hoàn toàn vắng bóng (0%). (Bảng 3)

Bảng 3. *Các KNV liên quan tập đóng, tập mở trong thể chế Toán ĐHĐN*

KNV	**VD**	**BT**	**Tổng (%)**
$T_{CMM-ĐN}$: Chứng minh tập mở dựa trên định nghĩa	0	2	2/13 (15,4%)
$T_{CMĐ-ĐN}$: Chứng minh tập đóng dựa trên định nghĩa	0	1	1/13 (7,7%)
$T_{XTĐM-ĐN}$: Xét tính đóng, mở của một tập bằng định nghĩa	0	0	0/13 (0%)
$T_{XĐM-KNLQ}$: Xét tính đóng, mở dựa trên các khái niệm liên quan	3	1	4/13 (30,8%)
$T_{CMĐL}$: Chứng minh định lí và hệ quả	2	4	6/13 (41,6%)

- ***Giả thuyết nghiên cứu***

Từ các ghi nhận thực tế, phân tích tri thức luận và phân tích mối quan hệ thể chế Toán của ba trường ĐHSPTPHCM, ĐHSG và ĐHĐN cho phép rút ra hai giả thuyết nghiên cứu H1 và H2 như sau:

H1: *Việc xây dựng khái niệm tập mở, đóng như một quá trình khái quát hóa của khoảng mở, khoảng đóng của đường thẳng thực $\mathbb{R}$ trong không gian $\mathbb{R}^n$ là một chướng ngại tri thức luận ảnh hưởng đến các chiến lược giải quyết KNV xét tính đóng, mở của một tập trong $\mathbb{R}^n$ của SV.*

H2: *Mối quan hệ thể chế Toán của ba trường ĐHSPTPHCM, ĐHSG, ĐHĐN đối với khái niệm tập mở, tập đóng ảnh hưởng đến việc giải quyết KNV xét tính đóng, mở của* ***một tập cụ thể*** *trong các không gian $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$ với mêtric thông thường của SV.*

Hai giả thuyết nghiên cứu này sẽ được kiểm chứng bằng một thực nghiệm được trình bày trong phần tiếp theo.

2. Thực nghiệm

Thực nghiệm được tiến hành vào giữa tháng 11/2017 trên 121 SV, trong đó gồm 44 SV lớp Toán Ứng dụng (SGU) và 23 SV lớp sư phạm Toán (SGS) của ĐHSG, 17 SV Sư phạm Toán của ĐHSP TPHCM, 37 SV sư phạm Toán của ĐHĐN. Tất cả 121 SV đều là SV năm hai, đã học xong học phần "Mêtric và Tôpô" hoặc "Giải tích hàm" (ĐHSG và ĐHĐN) hay "Tôpô đại cương" (ĐHSP TPHCM). Mục đích thực nghiệm không nhằm tìm hiểu ảnh hưởng của ba cách tiếp cận khái niệm tập mở, tập đóng lên các chiến lược giải của SV trong việc xét tính đóng, mở của một tập, mà nhằm kiểm chứng hai giả thuyết H1 và H2.

2.1. Nội dung thực nghiệm

Thực nghiệm bao gồm bộ ba câu hỏi điều tra dạng viết, thời gian làm bài 45 phút. Trong mỗi câu, SV chọn câu trả lời thỏa đáng theo lựa chọn của họ và giải thích cho sự lựa chọn câu trả lời đó. Cả ba câu hỏi đều thuộc KVN $T_{XTĐM}$: Xét tính đóng, mở của một tập số cụ thể trong $\mathbb{R}$ *và* $\mathbb{R}^2$, và được thiết kế sao cho SV có thể sử dụng các định lí và hệ quả liên quan đến tập đóng, tập mở để giải quyết KNV này.

Bộ câu hỏi điều tra gồm 3 câu hỏi như sau:

Câu hỏi 1. Xét không gian mêtric ($\mathbb{R}$, d) với d là mêtric Euclide thông thường trên $\mathbb{R}$. Trong các tập sau đây, hãy xác định tập nào là tập đóng và tập nào không phải là tập đóng? Giải thích tại sao?

$$A = (0,1] \quad ; \qquad B = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}\ .$$

Mục đích của Câu hỏi 1 là nhằm kiểm tra xem SV có xác định được A là tập không đóng, và B là một tập đóng trong không gian mêtric ($\mathbb{R}$, d).

Câu hỏi 2. Cho (2; 4) là một khoảng mở trong không gian mêtric ($\mathbb{R}$, d) với d là mêtric Euclide thông thường trên $\mathbb{R}$. Ta đặt $C = (2;4)\times\{0\}$ và gọi δ là mêtric Euclide thông thường trên $\mathbb{R}^2$. Trong không gian mêtric $(\mathbb{R}^2,\delta)$, tập con C là một tập:

a) Mở, không đóng, *b) Đóng, không mở,*
c) Không mở, không đóng, *d) Vừa mở, vừa đóng.*
Hãy giải thích tại sao?

Mục đích của Câu hỏi 2 là nhằm xác định sự ảnh hưởng của tính mở của khoảng (2; 4) trong không gian ($\mathbb{R}$, *d*) lên việc xét tính mở của tập *C* trong không gian $(\mathbb{R}^2,\delta)$. Đáp án chính xác là *C* không đóng, không mở.

Câu hỏi 3. Trong không gian mêtric $(\mathbb{R}^2,\delta)$ với δ là mêtric Euclide thông thường trên $\mathbb{R}^2$, tập $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+3y=5\}$ là một tập:

a) Mở, không đóng, *b) Đóng, không mở,*
b) Vừa đóng, vừa mở, *d) Đáp án khác.*
Hãy giải thích tại sao?

Mục đích của Câu hỏi 3 là nhằm xác định sự ảnh hưởng của tính vừa mở, vừa đóng của đường thẳng thực $\mathbb{R}$ lên việc xét tính đóng, mở của đường thẳng biểu diễn tập *D* trong không gian $(\mathbb{R}^2,\delta)$. Đáp án chính xác là tập *D* đóng, không mở trong $(\mathbb{R}^2,\delta)$.

2.2. Dự kiến các chiến lược giải (CLG) của sinh viên khi trả lời các câu hỏi

Đối với Câu hỏi 1, các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng của tập *A* và *B* được trình bày trong các Bảng 4 và 5.

***Bảng 4.** Các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng của tập A*

Tập	Chiến lược	Nội dung
	S_{CS}: định nghĩa tập đóng	Xét $\mathbb{R}\setminus A = (-\infty;0]\cup(1;+\infty)$. Vì không tồn tại quả cầu tâm 0, bán kính $r>0$ đủ nhỏ để $B(0,r)\subset\mathbb{R}\setminus A$, nên $\mathbb{R}\setminus A$ không mở. Do đó, *A* không đóng
	S_B: biên	Vì $\delta A=\{0,1\}$ và *A* không chứa tất cả các điểm biên của nó nên *A* không đóng
A	**S_{CL}**: bao đóng	Vì $\overline{A}=[0,1]$ và $\overline{A}\neq A$, nên *A* không đóng
	S_{SL}: giới hạn dãy	Chọn dãy $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ với $n\in\mathbb{N}$. Vì $x_n\in A$ và $\lim x_n = 0\notin A$, nên *A* không đóng
	S_{INV}: khoảng trong $\mathbb{R}$	Vì tập *A* = (0; 1] là nửa khoảng không đóng bên trái nên *A* không đóng

***Bảng 5.** Các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng của tập B*

Tập	Chiến lược	Nội dung
	***S**$_{CS}$*: định nghĩa tập đóng	Xét $\mathbb{R}\setminus B=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$. Vì tập $\mathbb{R}\setminus B$ là hợp hai tập mở nên $\mathbb{R}\setminus B$ là tập mở. Do đó, *B* đóng.
		Vì $B=\{0\}$ và $\mathbb{R}\setminus B=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ là tập mở, nên *B* đóng
	***S**$_{B}$*: biên	Vì $\partial B=\{0\}$ và *B* chứa tất cả các điểm biên của nó nên *B* đóng
B	***S**$_{CL}$*: bao đóng	Vì $\overline{B}=\{0\}$ và $\overline{B}=B$, nên *B* đóng
	***S**$_{OI}$* : giao các tập mở	Vì *B* là giao các tập mở nên *B* mở, do đó *B* không đóng
	***S**$_{INV}$*: khoảng trong $\mathbb{R}$	Vì *B* là giao các khoảng mở nên là tập mở

Đối với Câu hỏi 2, các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng và xét tính mở của tập *C* được trình bày trong Bảng 6.

***Bảng 6.** Các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng, mở của tập C*

Tập	Chiến lược	Nội dung
	S**$_{OB}$:** quả cầu mở	không tìm được quả cầu mở tâm $x = (3; 0)$, bán kính $r > 0$ chứa trong *C* nên *C* không mở
	***S**$_{In}$*: phần trong	Vì *C* có phần trong $\overset{0}{C}$ là rỗng, nên $\overset{0}{C}\neq C$, suy ra *C* không mở
C	***S**$_{CS}$*: định nghĩa tập đóng	Xét $\mathbb{R}^2\setminus C=\{(x_1;x_2)\mid x_1\notin(2,4)\vee x_2\neq 0\}$. Vì $x=(2;0)\in\mathbb{R}^2\setminus C$ và không tồn tại *r* dương đủ nhỏ sao cho $B(x,r)\subset\mathbb{R}^2\setminus C$, nên $\mathbb{R}^2\setminus C$ không mở, do đó *C* không đóng
	***S**$_{B}$*: biên	Vì $\delta C=[2;\ 4]\times\{0\}$ và $\delta C\not\subset C$ nên *C* không đóng
	***S**$_{CL}$*: bao đóng	Vì $\overline{C}=[2,4]\times\{0\}$ và $\overline{C}\neq C$, nên *C* không đóng
	***S**$_{SL}$*: giới hạn dãy	Chọn dãy $(x_n)=\left(2+\dfrac{1}{n};0\right)$ với $n\in\mathbb{N}$. Vì $x_n\in C$ và $\lim x_n=(2;0)\notin C$, nên *C* không đóng

Đối với Câu hỏi 3, các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng và xét tính mở của tập *D* được trình bày trong Bảng 7, trong đó (Δ) là đường thẳng có phương trình $x + 3y = 5$.

Bảng 7. *Các CLG có thể đối với KNV xét tính đóng, mở của tập D*

Tập	**Chiến lược**	**Nội dung**
D	$\boldsymbol{S_{CS}}$: định nghĩa tập đóng	Biểu diễn của D là đường thẳng chia mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ thành hai miền là hai tập mở, do đó $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mở, suy ra D đóng.
		Với điểm I tùy ý thuộc $\mathbb{R}^2 \setminus D$, tồn tại quả cầu mở với bán kính $r = \frac{1}{2} d(I, \Delta)$ chứa trong $\mathbb{R}^2 \setminus D$, do đó $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mở, suy ra D đóng
	$\boldsymbol{S_B}$: biên	Đường thẳng biểu diễn D không có biên nên không đóng
	$\boldsymbol{S_{OB}}$: quả cầu mở	Với điểm I tùy ý thuộc đường thẳng $x + 3y = 5$, không tồn tại quả cầu mở tâm I chứa trong đường thẳng đó, nên D không mở
	$\boldsymbol{S_R}$: đường thẳng thực	Biểu diễn của D là đường thẳng như đường thẳng thực nên vừa mở vừa đóng

2.3. Phân tích hậu nghiệm

- ***Phân tích kết quả Câu 1***

Đối với tập *A*, CLG được huy động nhiều nhất là S_B với 27/121 trường hợp và tất cả trả lời chính xác. CLG được huy động nhiều tiếp theo là S_{CS} sử dụng định nghĩa của tập đóng. Tuy nhiên, trong số 21/121 trường hợp này thì có 5 trường hợp trả lời không chính xác. Chẳng hạn, có SV suy luận "*tập* $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 0] \cup (1; +\infty)$ *là hợp của tập không mở (−∞; 0] và tập mở (1; +∞) nên không mở, do đó A không đóng*". Tiếp theo, có 8/121 trường hợp chứng tỏ rằng *A* không thể chứa quả cầu tâm là 1 với bán kính nhỏ tùy ý nên *A* không đóng. Có 7/121 trường hợp huy động S_{SL}, nhưng có 2 trường hợp không chính xác khi chỉ chọn một dãy trong *A* hội tụ về 1 và kết luận *A* đóng. Đặc biệt, có 8/121 trường hợp huy động CLG S_{INV} suy luận rằng "*A là khoảng không đóng bên trái, hay A là nửa khoảng mở nên A không đóng*". Sau cùng, có đến 48/121 trường hợp không trả lời câu hỏi. Như vậy, có tổng cộng 58/121 trường hợp trả lời đúng và giải thích hợp lí.

Bảng 8. *Các CLG được huy động cho KVN xét tính đóng của tập A*

	Chiến lược	**Trả lời**		**Tổng**
		Đúng	**Sai**	
Tập *A*	$\boldsymbol{S_{CS}}$	16/121	5/121	21/121 (17,4%)
	$\boldsymbol{S_B}$	27/121	0/121	27/121 (22,3%)
	$\boldsymbol{S_{CL}}$	2/121	0/121	2/121 (1,7%)
	$\boldsymbol{S_{SL}}$	5/121	2/121	7/121 (5,8%)
	$\boldsymbol{S_{INV}}$	8/121	0/121	8/121 (6,6%)
	$\boldsymbol{S_{khac}}$	0/121	8/121	8/121 (6,6%)

Đối với tập *B*, CLG chiếm đa số là S_{CS} với 24/121 trường hợp, nhưng trong đó có 4 trường hợp hiểu sai $\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right]$. CLG chiếm số lượng nhiều tiếp theo là S_{OI} với 19/121 trường hợp và tất cả đều trả lời không chính xác vì các SV này cho rằng "giao vô hạn các tập mở là mở". Có 8/121 trường hợp huy động CLG S_{INV} cho rằng "giao các khoảng mở là tập mở". Có 4 SV huy động CLG S_B, nhưng đều suy luận không chính xác, chẳng hạn có SV xác định $\partial B = \left\{-\frac{1}{\infty};\frac{1}{\infty}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus B$, suy ra *B* mở. Có 3 SV huy động CLG khác, trong đó SV thứ nhất chọn dãy $\{x_n\} = \left\{-\frac{1}{n}\right\} \subset B$ có $\lim x_n = 0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right) = B$, do đó *B* đóng. SV này không nhận ra $\{x_n | n \in \mathbb{N}\} \not\subset B$, và hơn nữa đây chỉ là trường hợp của một dãy. Hai SV lại đi chứng minh *B* mở bằng cách chứng tỏ rằng $B = \left(-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right)$ và với mọi *x* thuộc *B* đều có một quả cầu $B(x,\varepsilon) \subset B$. Sau cùng, có 63 trường hợp không trả lời. Vậy, đối với tập *B*, chỉ có 20 trường hợp trả lời đúng *B* là tập đóng.

Bảng 9. *Các CLG được huy động cho KVN xét tính đóng của tập B*

	Chiến lược	Trả lời		Tổng
		Đúng	Sai	
Tập *B*	S_{CS}	20/121	4/121	24/121 (19,8%)
	S_B	0/121	4/121	4/121 (3,3%)
	S_{CL}	0/121	0/121	0/121 (0%)
	S_{OI}	0/121	19/121	19/121 (15,7%)
	S_{INV}	0/121	8/121	8/121 (6,6%)
	S_{khac}	0/121	3/121	3/121 (2,5%)

Kết quả phân tích cho thấy SV gặp khá nhiều khó khăn khi xét tính đóng, mở của một tập hợp số cụ thể trong không gian *R*. Tỉ lệ SV không trả lời và trả lời không chính xác lần lượt chiếm 52,1% và 83,5% trong KNV xét tính đóng của tập *A* và *B*. Sự chênh lệch lớn giữa hai tỉ lệ này do tập *A* có dạng quen thuộc (a; b] là tập không đóng, không mở, so với dạng giao vô hạn các tập mở trong $\mathbb{R}$ của *B*. Đặc biệt có sự xuất hiện các CLG sử dụng các tính chất của khoảng mở, khoảng đóng, khoảng nửa mở vào giải quyết KNV xét tính đóng của cả hai tập *A* và *B*.

- ***Phân tích kết quả Câu 2***

CLG được huy động nhiều nhất là S_B với 11/121 trường hợp để vừa xét tính đóng, vừa xét tính mở của *C*. Tuy nhiên, tất cả 11 trường hợp này đều trả lời không chính xác. Chẳng hạn, có SV lí luận rằng "$\{2,4\} \not\subset C$, nghĩa là *C* không chứa biên của nó, nên *C* không đóng và do đó *C* mở".

***Bảng 10.** Các CLG được huy động cho KVN xét tính đóng, mở của tập C*

	Chiến lược	Trả lời		Tổng
		Đúng	Sai	
Tập *C*	$S_{OB} + S_{CS}$	4/121	3/121	7/121 (5,8%)
	S_{CS}	0/121	1/121	1/121 (0,8%)
	$S_{OB} + S_{B}$	0/121	2/121	2/121 (1,7%)
	S_{In}	0/121	0/121	0/121 (0%)
	S_{B}	0/121	11/121	11/121 (9,1%)
	S_{SL}	0/121	1/121	1/121 (0,8%)
	S_{khac}	0/121	16/121	16/121 (13,2%)

CLG khác được sử dụng nhiều tiếp theo là $S_{OB} + S_{CS}$ với 7 trường hợp, trong đó S_{OB} để xét tính mở và S_{CS} để xét tính đóng của *C*. Tuy nhiên, có 3/7 trường hợp trả lời không chính xác. Chẳng hạn, để xét tính mở của *C*, một SV giả sử "có quả cầu mở *B* tâm (3; 0), bán kính $r > 0$ nằm trong *C*, vì khoảng cách giữa $\left(3;\frac{r}{2}\right)$ và (3; 0) nhỏ hơn *r*, nên $\left(3;\frac{r}{2}\right)$ thuộc *C* dẫn đến $\frac{r}{2} = 0$ trái giả thiết $r > 0$, do đó *C* không mở".

Để xét tính đóng của *C*, SV này giả sử "có quả cầu *B* tâm (2; 0) nằm trong $\mathbb{R}^2 \setminus C$ và đặt $m = \min\{r, 2\}$ thì điểm $\left(2+\frac{m}{2};0\right)$ thuộc $\mathbb{R}^2 \setminus C$, dẫn đến $m \geq 4$ trái giả thiết của *m*".

Có hai SV huy động CLG $S_{OB}+S_{B}$, trong đó S_{OB} để xét tính mở và S_{B} để xét tính đóng của *C*, nhưng cả hai đều trả lời không chính xác. Một trong hai SV này lí luận "quả cầu mở *B*(0, 1) không nằm trong *C* nên *C* không mở, và $\partial C = \{0, 2, 4\} \not\subset C$ nên *C* không đóng".

Có một SV huy động CLG S_{CS} trả lời không chính xác, cho rằng "*C* không đóng vì $(2; 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, và vì *C* không đóng nên *C* là tập mở".

Có một SV huy động CLG S_{SL} trả lời không chính xác, lấy một dãy bất kì $\{x_n\} \times \{y_n\} \in C$ sao cho $\{x_n\}$ hội tụ về 2 và $\{y_n\}$ hội tụ về 0, vì $2 \notin C$ và $y \notin C$ nên *C* là tập không mở, không đóng.

Có 16 SV huy động các CLG khác đều trả lời không chính xác. Chẳng hạn, SV thứ nhất cho rằng "*C mở vì* $C = \bigcup_{x\in(2,4)} (x;0)$ *và (2; 4) mở trong* $\mathbb{R}$". SV này áp dụng tính chất hợp vô hạn các tập mở trong $\mathbb{R}$ là mở trong $\mathbb{R}$ cho tập trong $\mathbb{R}^2$. SV thứ hai cho rằng "*C* là giao của hai tập mở $(-\infty;4)\times\{0\}$ và $(2;+\infty)\times\{0\}$ nên là tập mở". SV này đã áp dụng tính chất giao của hai tập mở là mở. SV thứ ba lí luận rằng "$C = \{(x;0) : x \in (2;4), x \in \mathbb{R}\}$, tập các phần tử của *C* thực chất là một đoạn thẳng bỏ hai đầu mút trong $\mathbb{R}^2$, do đó *C* mở". SV thứ tư lí luận rằng "(2; 4) là một tập mở trong $\mathbb{R}$, {0} là tập đóng vì $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ mở trong $\mathbb{R}$ do nó là hợp của hai khoảng mở trong $\mathbb{R}$, suy ra *C* vừa đóng vừa mở".

Sau cùng, không có trường hợp nào huy động chiến lược phần trong S_{In} để xét tính mở của *C*, và có đến 83/121 không trả lời Câu hỏi 2.

Kết quả phân tích cho thấy SV gặp nhiều khó khăn và phạm nhiều sai lầm hơn khi giải quyết KNV xét tính đóng, mở của một tập trong không gian $\mathbb{R}^2$ so với trong không gian $\mathbb{R}$. Các khó khăn của SV gắn liền với các quan niệm không chính xác về biên, tập tích, quan hệ bao hàm, quan hệ thuộc… Mặc dù, các CLG đa dạng, vận dụng nhiều định lí và hệ quả trong việc xét tính đóng, mở của tập *C*, nhưng tỉ lệ thành công rất thấp. Đặc biệt, xuất hiện một số CLG sử dụng các tính chất liên quan đến khoảng mở, đóng trong $\mathbb{R}$ như tập mở, tập đóng vào trong $\mathbb{R}^2$.

- ***Phân tích kết quả Câu 3***

Hai CLG được huy động nhiều nhất là $S_{OB}+S_{CS}$ và S_{OB} với 9/121 trường hợp cho mỗi CLG. Với CLG $S_{OB}+S_{CS}$, có 8 trường hợp trả lời đúng và giải thích chính xác. Trường hợp duy nhất trả lời chính xác là *D* đóng và không mở, nhưng giải thích sai. Để chứng minh *D* không mở, SV này suy luận rằng "với mọi điểm thuộc đường thẳng (Δ): $x + 3y = 5$, có một quả cầu mở có tâm là điểm đó không chứa trong đường thẳng (Δ)". Với CLG S_{OB}, tất cả 9 trường hợp đều trả lời không chính xác. Chẳng hạn, có SV lí luận rằng "với mọi điểm thuộc đường thẳng (Δ), không tồn tại quả cầu mở có tâm là điểm đó chứa trong *D*, do đó *D* không mở và từ đó suy ra *D* đóng".

Hai CLG S_{CS} và S_B đều chỉ có 1 trường hợp huy động cho mỗi CLG, nhưng cả hai trường hợp này đều trả lời không chính xác. SV huy động S_B cho rằng *D* chứa các điểm biên {0, 1, 2} (điều này sai) nên *D* là tập đóng và suy ra *D* không mở. SV huy động S_{CS} chứng tỏ rằng "mọi điểm thuộc phần bù của *D* đều có quả cầu mở có tâm là điểm đó chứa trong phần bù của *D*, do đó *D* đóng và từ đó suy ra *D* không mở". SV này mặc dù suy luận *D* đóng là đúng, nhưng từ đó suy ra *D* không mở là sai.

Bảng 11. *Các CLG được huy động cho KVN xét tính đóng, mở của tập D*

	Chiến lược	**Trả lời**		**Tổng**
		Đúng	**Sai**	
Tập *D*	$S_{OB} + S_{CS}$	8/121	1/121	9/121 (7,4%)
	S_{CS}	0/121	1/121	1/121 (0,8%)
	S_{OB}	0/121	9/121	9/121 (7,4%)
	S_B	0/121	1/121	1/121 (0,8%)
	S_{khac}	0/121	22/121	22/121 (18,2%)

Có 22/121 trường hợp huy động các CLG khác và đều trả lời và giải thích không chính xác. Trong đó, có 15 trường hợp huy động S_R trả lời rằng tập *D* vừa mở vừa đóng và giải thích rằng "đường biểu diễn tập *D* là đường thẳng như đường thẳng thực".

Sau cùng, có đến 79/121 trường hợp không trả lời Câu hỏi 3.

Kết quả phân tích SV biết sử dụng định nghĩa tập đóng, tập mở để xét tính đóng mở của *D*, nhưng số lượng không nhiều và chỉ có 8/20 trường hợp trả lời chính xác. Tồn tại các quan niệm không chính xác ở SV như: "tập đóng thì không mở, tập mở thì không đóng". Đặc biệt, trong số 22/121 trường hợp sử dụng các CLG khác, có 17 trường hợp xem đường biểu diễn tập *D* như đường thẳng thực nên vừa mở vừa đóng.

3. Kết luận

Kết quả thực nghiệm cho phép rút ra những kết luận sau:

Tồn tại một số quan niệm về tính đóng, mở ở SV: Một tập đóng thì không mở, một tập mở thì không đóng. Các quan niệm này có nguồn gốc từ định nghĩa của tập đóng: "nếu phần bù của một tập là mở thì tập đó là đóng", và từ tính nhị nguyên "đóng-mở" của một số hiện tượng trong cuộc sống, ví dụ: "cửa không mở thì đóng, cửa không đóng thì mở".

SV gặp nhiều khó khăn trong giải quyết KNV xét tính đóng, mở của một tập số cụ thể trong $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}^2$. Những khó khăn này thể hiện ở các quan niệm không chính xác về biên của một tập, về khái niệm tập tích trong $\mathbb{R}^2$, về quan hệ bao hàm và quan hệ thuộc trong $\mathbb{R}^2$, về phép lấy phần bù của giao các tập hợp… Những sai lầm này sinh ra từ ràng buộc của thể chế ảnh hưởng lên mối quan hệ cá nhân của SV lên việc giải quyết KNV xét tính đóng, mở của ***một tập cụ thể***. Từ đó, cho phép khẳng định giả thuyết nghiên cứu H2.

Không có SV nào sử dụng định nghĩa tập mở bằng phần trong để xét tính mở của tập *C*. Điều này chứng tỏ SV gặp nhiều khó khăn trong quan niệm về phần trong của một tập số cụ thể trong $\mathbb{R}^2$.

Tỉ lệ trường hợp không trả lời hay trả lời không chính xác chênh lệch khá lớn đối với cùng KNV xét tính đóng của tập *A* và *B* trong câu hỏi 1 cho thấy tồn tại ở SV một quan niệm: "giao của một họ các tập mở là mở", bất kể đó là giao của một họ hữu hạn các tập mở hay giao của một họ vô hạn các tập mở.

Số lượng trường hợp không trả lời hay trả lời không chính xác tăng từ 50% lên hơn 80% khi chuyển từ Câu hỏi 1 sang Câu hỏi 2 và 3, cùng với sự xuất hiện quan niệm rằng một đoạn thẳng trong $\mathbb{R}^2$ là một tập đóng, một đường thẳng trong $\mathbb{R}^2$ là tập vừa mở, vừa đóng tương tự đường thẳng thực trong $\mathbb{R}$. Từ đó, cho phép khẳng định giả thuyết nghiên cứu H1.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ bản của didactic Toán*. TP Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc gia.

Lê Thị Hoài Châu. (2017). Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên. Hội thảo quốc tế về Didactic Toán lần thứ 6. *Actes du sixième colloque international en didactique des mathématiques*, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.

Nguyễn Văn Khuê, Bùi Đắc Tắc và Đỗ Đức Thái. (2001). *Cơ sở lí thuyết hàm và giải tích hàm*. Hà Nội: NXB Giáo dục.

Nguyễn Ái Quốc. (2018a). Một phân tích tri thức luận khái niệm tập mở, tập đóng trong giải tích và tôpô học. *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, 15*(10), 130-144.

Trần Tráng. (2005). *Giáo trình Tôpô đại cương*. TP Hồ Chí Minh: Đại học Sư phạm TPHCM.

Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, Đặng Hoàng Tâm và Đinh Ngọc Thanh. (2011). *Giải tích hàm*. TP Hồ Chí Minh: NXB Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh.

Trường Đại học Đồng Nai. (2013). *Chương trình khung trình độ Đại học và kế hoạch đào tạo ngành: Sư phạm Toán học*.

Trường Đại học Sài Gòn. (2016). *Chương trình đào tạo trình độ đại học, ngành: Sư phạm Toán*.

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh. (2016). *Chương trình giáo dục đại học, ngành đào tạo: Sư phạm Toán học*.

Sutherland, W. A. (2009). *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Second Edition, Oxford University Press.

Artigue, M. (1991). Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathematiques, 10*(3), 241-286.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 4*(2), 165-198.

AN EXPERIMENTAL STUDY OF THE DIFFICULTIES INVOLVED IN LEARNING THE CONCEPT OF OPEN SET AND CLOSED SET IN METRIC SPACES

Nguyen Ai Quoc, Le MinhTuan

Saigon University

Corresponding author: Email: nguyenaq2014@gmail.com

Received: 14/5/2018; Revised: 12/7/2018; Accepted: 17/01/2019

ABSTRACT

In this paper, we present the experimental research's results about the student's difficulties in three universities: Ho Chi Minh city University of education, Sai Gon University and Dong Nai University when solving the task of considering the closedness, the openness of a set in metric space. These difficulties are generated by the epistemological obstacle associated with the development of open-set and closed-set concepts such as the generalizing of the open and closed interavls of and by the influence of institutional relations of university mathematics to open and closed sets.

Keywords: epistemological obstacles, difficulties, metric spaces, closed sets, open sets.