

CHỈNH HÓA BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC THỜI GIAN TRONG TỌA ĐỘ CẦU

LƯU HỒNG PHONG*, PHẠM HOÀNG QUÂN**, LÊ MINH TRIẾT***

TÓM TẮT

Như chúng ta đã biết, bài toán nhiệt ngược có nhiều ứng dụng trong vật lý và các ngành khoa học kỹ thuật. Cho đến nay, các công trình nghiên cứu bài toán nhiệt ngược chủ yếu xem xét bài toán trong tọa độ Đề-các, có rất ít bài báo xem xét bài toán trong tọa độ cực, tọa độ trụ hay tọa độ cầu. Do đó trong bài báo này, chúng tôi mong muốn nghiên cứu bài toán nhiệt ngược trong tọa độ cầu với hệ số khuếch tán phụ thuộc vào thời gian. Chi tiết hơn, chúng tôi sẽ chỉnh hóa bài toán bằng cách áp dụng phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh và đưa ra tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa nhanh hơn dạng Hölder. Và sau cùng, một ví dụ số được đưa ra để minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp của chúng tôi.

Từ khóa: bài toán nhiệt ngược, tọa độ cầu, phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh.

ABSTRACT

Regularizing the Backward Heat Problem with time-dependent diffusivity in the spherical coordinates

It is known that the backward heat problem (BHP) has many applications in physics and engineering sciences. Until now, the works on the BHP have been conducted in Descartes coordinates, and there have been few papers in polar coordinates, cylindrical coordinates or spherical coordinates. Therefore, in this paper, we study the BHP in the spherical coordinates with the time-dependent diffusivity. In more details, we regularize the problem by applying the modified quasi-boundary value method and get the convergence of the regularized solution, which is better than the Hölder type. Eventually, a numerical experiment is given to illustrate the effectiveness of our method.

Keywords: backward heat problem, spherical coordinates, the modified quasi-boundary value method.

1. Giới thiệu

Như đã biết, lý thuyết phương trình đạo hàm riêng đã xuất hiện từ lâu trong vật lý và các ứng dụng khoa học kỹ thuật. Cho đến nay, một trong các phương trình đạo hàm riêng được khảo sát đến nhiều nhất là phương trình parabolic. Cụ thể hơn, bài toán

* NCS - ThS, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – ĐHQG TPHCM

** PGS TS, Trường Đại học Sài Gòn; Email: phquan@sgu.edu.vn

*** TS, Trường Đại học Sài Gòn

ngược cho phương trình nhiệt được đưa vào nghiên cứu trong nhiều thập kỉ qua. Ý nghĩa của bài toán, đó là, chúng ta phải tìm lại được sự phân bố nhiệt tại một thời điểm cụ thể $t < T$ khi chúng ta đo đạc được sự phân bố nhiệt tại thời điểm cuối T . Bài toán này được xuất hiện trong nhiều ngành khoa học kĩ thuật; ví dụ như, xác định nhiệt độ đầu của một vật thể, việc đo đạc di chuyển của nước ngầm, xác định và kiểm soát các nguồn ô nhiễm, bảo vệ môi trường...

Bài toán nhiệt ngược (BHP) được xuất hiện trong nhiều bài báo chẳng hạn như [9, 13, 14, 16, 17]. Các bài báo trên tập trung nghiên cứu chủ yếu vào các bài toán BHP một chiều với hệ số hằng hoặc không hằng trong tọa độ Đề-các. Chi tiết hơn, trong [13], P. H. Quân cùng với các cộng sự đã xem xét bài toán BHP với hệ số khuếch tán phụ thuộc thời gian sau:

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) = a(t)u(x, t), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, T) = g(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Bằng phương pháp tựa giá trị biên (MQBV) và yêu cầu một số điều kiện đầu cho dữ liệu chính xác, các tác giả thu được tốc độ hội tụ của nghiệm chính hóa nhanh hơn dạng Hölder. Tuy nhiên, các bài toán BHP được xét trong tọa độ cực thì rất hiếm. Gần đây, bài toán truyền nhiệt ngược đối xứng (ABHP) trên một đĩa tròn được nghiên cứu bởi W. Cheng và C. L. Fu [3, 4]. Trong bài báo [3, 4], W. Cheng và C. L. Fu đã sử dụng phương pháp chặt cụt phổ toán tử và phương pháp Tikhonov có điều chỉnh để chính hóa bài toán sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}, & 0 < r \leq r_0, \quad 0 < t < T, \\ u(r, T) = \varphi(r), & 0 \leq r \leq r_0, \\ u(r_0, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ |u(0, t)| < \infty, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.2)$$

Với một số điều kiện của nghiệm chính xác, các tác giả thu được các sai số dưới dạng logarit. Trong [5], một mô hình vật lí được xem xét đến là xác định nguồn nhiệt trong một quả cầu có bán kính r_0 và được xét trong trường hợp đối xứng tâm với thông lượng nhiệt trên bề mặt bằng 0. Từ đó, mô hình toán học tương ứng có thể mô tả qua bài toán BHP đối xứng tâm sau:

$$\begin{cases} u_t = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r, & 0 < r < r_0, \quad 0 < t < T, \\ u_r(r_0, t) = 0, & 0 < t < T, \\ u(r, T) = \varphi(r), & 0 < r < r_0, \\ |u(0, t)| < \infty, & 0 < t < T, \end{cases} \quad (1.3)$$

trong đó, $\varphi(r)$ là nhiệt độ tại thời điểm cuối. Hơn nữa, các tác giả đã sử dụng phương pháp Tikhonov có điều chỉnh để thu được tốc độ hội tụ nhanh hơn dạng Hölder (xem [5]). Một điểm yếu của hai bài toán (1.2), (1.3) đó là sự phân bố nhiệt ở thời điểm cuối T lần lượt độc lập với θ và (θ, ϕ) mà rõ ràng điều này khó xảy ra trong thực tế. Do đó, để tổng quát hơn và mang tính ứng dụng thực tế nhiều hơn, với ý tưởng của hai bài toán (1.1) và (1.3), chúng tôi tập trung nghiên cứu bài toán xác định sự phân bố nhiệt độ $u(r, \theta, \phi, t)$, với $(r, \theta, \phi, t) \in (0, a) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, T)$ thỏa mãn:

$$u_t = a(t) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \csc^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \right\}, \quad (1.4)$$

$$u(a, \theta, \phi, t) = 0, \quad (1.5)$$

$$u(r, \theta, \phi, T) = f(r, \theta, \phi), \quad (1.6)$$

$$|u(0, \theta, \phi, t)| < \infty, \quad (1.7)$$

trong đó, f là nhiệt độ tại thời điểm cuối T và $a(t)$ là hệ số khuếch tán. Bài toán (1.6), (1.7) là một bài toán không chỉnh. Do đó, nếu có sự thay đổi rất nhỏ của dữ liệu thì nghiệm xấp xỉ tìm được, nếu tồn tại, sẽ có sự sai khác rất lớn so với nghiệm chính xác. Vấn đề quan trọng được các nhà nghiên cứu quan tâm là chỉnh hóa bài toán, nhằm đưa ra nghiệm xấp xỉ ổn định cho bài toán. Từ đó, chúng tôi vận dụng phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh để xây dựng nghiệm chỉnh hóa cho bài toán (1.4)-(1.7). Ý tưởng của phương pháp này là thêm vào điều kiện biên (1.6) một lượng "ổn định" sẽ được trình bày sau. Hơn nữa, chúng tôi thu được ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa theo dạng Hölder kết hợp với logarit. Đặc biệt hơn, một ví dụ số được đề xuất để minh họa cho phương pháp của chúng tôi. Đây cũng là một điểm mạnh của bài báo này vì trong bài báo [5], các tác giả không đưa ra ví dụ số để minh họa cho phương pháp của họ.

Phần còn lại của bài báo được chia như sau: Chúng tôi đưa ra một số kiến thức liên quan đến việc tìm nghiệm chính xác của bài toán (1.4)-(1.7) trong Chương 2; Chương 3, chúng tôi giới thiệu nghiệm chỉnh hóa và đưa ra ước lượng sai số; Chương 4 thể hiện ví dụ số mà chúng tôi đề cập ở trên; cuối cùng, chúng tôi có kết luận trong Chương 5.

2. Một số định nghĩa và bổ đề

Định nghĩa 2.1. Cho $a > 0$ và $L^2[[0; a]; r] = \{f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ là hàm đo được Lebesgue với trọng lượng } r \text{ trên } [0; a]\}$. Từ đó, ta thấy rằng không gian $L^2[[0; a]; r]$ trên là một không gian định chuẩn với chuẩn

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^a r |f(r)|^2 dr \right)^{1/2}, \text{ với } f \in L^2[[0; a]; r].$$

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu một vài định nghĩa và bổ đề đã được trình bày trong [11, 19].

Bổ đề 2.1. Cho n là một số nguyên không âm. Khi đó, chúng ta có các hàm cầu Bessel loại một cấp n như sau:

$$j_n(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{1/2} J_{n+\frac{1}{2}}(x),$$

trong đó, $J_{n+\frac{1}{2}}$ là hàm Bessel loại một cấp $n+\frac{1}{2}$.

Bổ đề 2.2. Cho n là một số nguyên không âm và phương trình cầu Bessel cấp n được định nghĩa như sau

$$x^2 y'' + 2xy' + (\lambda^2 x^2 - n(n+1))y = 0, 0 < x < a, y(a) = 0. \quad (2.1)$$

Khi đó, chúng ta có các nghiệm của phương trình (2.1) như sau:

$$y_{n,j}(x) = j_n(\lambda_{n,j} x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots,$$

với $\lambda = \lambda_{n,j} = \frac{\alpha_{n+1/2,j}}{a}$, trong đó, $\alpha_{n+1/2,j}$ nghiệm dương thứ j của $J_{n+\frac{1}{2}}$.

Bổ đề 2.3. Cho n là một số nguyên không âm thì chúng ta có đa thức Legendre loại một cấp n như sau

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}, \quad (2.2)$$

trong đó, $M = n/2$ nếu n là số chẵn hay $(n-1)/2$ nếu n là số lẻ. Bên cạnh đó, chúng ta có hàm Legendre loại hai cấp n

$$Q_n(x) = P_n(x) \int \frac{1}{[P_n(x)]^2 (1-x^2)} dx, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.3)$$

Bổ đề 2.4. Cho $n=0, 1, 2, \dots$, ta có phương trình Legendre cấp n

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad -1 < x < 1. \quad (2.4)$$

Từ đó, nghiệm tổng quát của phương trình (2.4) là

$$y(x) = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x),$$

trong đó, $P_n(x)$, $Q_n(x)$ lần lượt được định nghĩa bởi (2.2) và (2.3), c_1, c_2 là các hằng số.

Chú ý 2.1.

i) Cho $n = 0, 1, 2, \dots$ và $m = 0, 1, 2, \dots$, hàm Legendre liên hợp $P_n^m(x)$ được định nghĩa dưới dạng đạo hàm cấp m của đa thức Legendre cấp n như sau:

$$P_n^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \quad (2.5)$$

Từ P_n là một đa thức cấp n , để P_n^m khác không, chúng ta phải chọn $0 \leq m \leq n$. Hơn nữa, nếu m là một số nguyên âm, chúng ta định nghĩa P_n^m bởi:

$$P_n^m(x) = (-1)^m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} P_n^{-m}(x).$$

Đây là mở rộng định nghĩa của hàm Legendre liên hợp với $n = 0, 1, 2, \dots$ và $m = -n, -(n-1), \dots, n-1, n$.

ii) Sau đây, chúng ta định nghĩa hàm cầu điều hòa $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ bởi:

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (2.6)$$

với $n = 0, 1, 2, \dots$ và $m = -n, -(n-1), \dots, n-1, n$.

Bổ đề 2.5. Cho n là một số nguyên không âm và phương trình vi phân cho hàm cầu điều hòa được định nghĩa như sau:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial \theta^2} + \cot\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \csc^2\theta \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + n(n+1)Y = 0,$$

với $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$. Khi đó, chúng ta có $2n+1$ nghiệm không tầm thường được cho bởi hàm cầu điều hòa

$$Y(\theta, \phi) = Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad |m| \leq n,$$

với $Y_{n,m}(\theta, \phi)$ được định nghĩa bởi (2.6).

Định nghĩa 2.2. Với $f(r, \theta, \phi)$ là một hàm khả tích bậc 2, xác định với $0 < r < a$, $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$, và có chu kỳ 2π theo biến ϕ . Khi đó, chúng ta có:

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{jnm} J_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta, \phi),$$

trong đó,

$$A_{jnm} = \frac{2}{a^3 j_{n+1}^2 \left(\alpha_{n+\frac{1}{2}, j} \right)} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \phi) j_n(\lambda_{n,j} r) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \phi) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr,$$

và $\bar{Y}_{n,m}$ là liên hợp phức của $Y_{n,m}$.

3. Các kết quả chính

Bằng cách sử dụng phương pháp tách biến và khai triển chuỗi cầu điều hòa, chúng tôi thu được nghiệm chính xác của bài toán (1.4)-(1.7) như sau:

$$u(r, \theta, \phi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_{jnm}(t) j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad (3.1)$$

trong đó,

$$A_{jnm}(t) = \exp\left\{ \lambda_{n,j}^2 (F(T) - F(t)) \right\} f_{jnm},$$

$$f_{jnm} = \frac{2}{a^3 j_{n+1}^2 \left(\alpha_{n+\frac{1}{2}, j} \right)} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \phi) j_n(\lambda_{n,j} r) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \phi) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr,$$

$$F(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Từ đó, chúng ta dễ dàng thấy rằng:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \exp\left\{ \lambda_{n,j}^2 (F(T) - F(t)) \right\} = +\infty, \quad n = 0, 1, \dots$$

Đây chính là nguyên nhân gây nên tính không ổn định của nghiệm chính xác (3.1). Do đó, chúng ta cần xây dựng một nghiệm xấp xỉ cho bài toán (1.4)-(1.7) bằng cách thay thế thừa số $\exp\left\{ \lambda_{n,j}^2 (F(T) - F(t)) \right\}$ bởi một thừa số "tốt hơn". Để làm được điều đó, chúng tôi đề xuất bài toán chỉnh hóa sau:

$$u_t^\varepsilon = a(t) \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \theta} + \csc^2 \theta \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \phi^2} \right) \right), \quad (3.2)$$

$$u^\varepsilon(a, \theta, \phi, t) = 0, \quad (3.3)$$

$$|u^\varepsilon(0, \theta, \phi, t)| < \infty, \quad (3.4)$$

và điều kiện biên tại $t = T$ như sau:

$$u^\varepsilon(r, \theta, \phi, T) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}}{\alpha(\varepsilon)\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}} f_{jnm}^\varepsilon j_n(\lambda_{n,j}r) Y_{n,m}(\theta, \phi),$$

$$f_{jnm}^\varepsilon = \frac{2}{a^3 j_{n+1}^2 \left(\alpha_{n+\frac{1}{2}, j} \right)} \int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f^\varepsilon(r, \theta, \phi) j_n(\lambda_{n,j}r) \bar{Y}_{n,m}(\theta, \phi) r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr,$$

với $\alpha(\varepsilon)$ là tham số chỉnh hóa được chọn sao cho $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha(\varepsilon) = 0$, $k \geq 0$ và f^ε là dữ liệu đo. Khi đó, chúng tôi thu được nghiệm chỉnh hóa u^ε ứng với dữ liệu đo f^ε

$$u^\varepsilon(r, \theta, \phi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{jnm}^\varepsilon(t) j_n(\lambda_{n,j}r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad (3.5)$$

trong đó,

$$B_{jnm}^\varepsilon(t) = \frac{\exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(t) + k)\}}{\alpha(\varepsilon)\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}} f_{jnm}^\varepsilon,$$

và nghiệm chỉnh hóa v^ε ứng với dữ liệu chính xác f

$$v^\varepsilon(r, \theta, \phi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n B_{jnm}(t) j_n(\lambda_{n,j}r) Y_{n,m}(\theta, \phi), \quad (3.6)$$

với

$$B_{jnm}(t) = \frac{\exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(t) + k)\}}{\alpha(\varepsilon)\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}} f_{jnm},$$

Để tiện cho việc trình bày, từ đây trở đi, chúng tôi kí hiệu $\alpha = \alpha(\varepsilon)$.

Sau đây, chúng tôi đưa ra một số bổ đề giúp ích cho việc đánh giá sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa.

Bổ đề 3.1. Giả sử $0 < \alpha < T$, $a > 0$, ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{\alpha a + \exp\{-aT\}} \leq \frac{T}{\alpha} \left(\ln \left(\frac{T}{\alpha} \right) \right)^{-1}.$$

Bổ đề 3.3. Giả sử $0 \leq t \leq s \leq T$, $0 < \alpha < T$ và $p \geq 2$. Khi đó, ta có các bất đẳng thức sau:

$$i) \sup_{a>0} \frac{\exp\{(s-t-T)a\}}{\alpha a + \exp\{-aT\}} \leq T_0 \left(\alpha \ln \left(\frac{T}{\alpha} \right) \right)^{\frac{t-s}{T}},$$

$$ii) \sup_{a>0} \frac{\exp\{-ta\}}{\alpha a + \exp\{-aT\}} \leq \frac{1}{T} \left(\alpha \ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \right)^{\frac{1}{T}-1},$$

$$iii) \sup_{a>0} \frac{a}{(1+a)^{-p/2} (\alpha a + \exp\{-aT\})} \leq C(p, T) \frac{T}{\alpha} \left(\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \right)^{-1},$$

$$\text{trong đó, } T_0 = \max\{1; T\} \text{ và } C(p, T) = \left(\frac{p-2}{2T} \right)^{1-p/2}.$$

Chứng minh.

Người đọc có thể tham khảo phần chứng minh của (i) - (ii) trong bài báo [13], nên trong phần này, chúng tôi chỉ chứng minh (iii). Đặt

$$H(a) = \frac{a^{1-p/2}}{\alpha a + \exp\{-aT\}}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\lim_{a \rightarrow 0} H(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} H(a) = 0$. Dẫn đến tồn tại $a_0 \in (0, \infty)$ sao cho:

$$H(a) \leq H(a_0) \text{ với } a > 0 \text{ và } H'(a_0) = 0.$$

Bằng phép tính đơn giản, chúng tôi có được:

$$\exp\{-a_0 T\} = \frac{\alpha a_0 p/2}{1 - p/2 + T a_0}. \quad (3.7)$$

Mặt khác, vế trái của (3.7) là một số thực dương, do đó, chúng tôi thu được:

$$a_0 \geq \frac{p-2}{2T}.$$

Áp dụng Bổ đề 3.1, suy ra:

$$H(a) \leq H(a_0) \leq \left(\frac{p-2}{2T} \right)^{1-p/2} \frac{T}{\alpha} \left(\ln\left(\frac{T}{\alpha}\right) \right)^{-1}.$$

Kết thúc chứng minh Bổ đề 3.1 iii).

Trong thực tế, để có được nhiệt độ tại thời điểm cuối T , chúng ta phải sử dụng các thiết bị đo đạc. Do đó, không thể tránh được sự xuất hiện sai số giữa dữ liệu chính xác f và dữ liệu đo đạc được. Trong bài báo này, chúng tôi giả sử dữ liệu đo đạc là f^ε và thỏa điều kiện sau:

H_1 : Giả sử, $f, f^\varepsilon \in L^2[[0; a]; r]$ lần lượt là dữ liệu chính xác và dữ liệu đo đạc sao cho:

$$\sup_{(\theta, \phi) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi)} \|f^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi) - f(\cdot, \theta, \phi)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ngoài ra, chúng tôi cần thêm một điều kiện đầu về nghiệm chính xác như sau:

H_2 : Với một số thực $p \geq 2$. Giả sử rằng $u(\cdot, \theta, \phi, t) \in H^p([0; a])$ - không gian Sobolev, tức là tồn tại một số dương K sao cho

$$\sup_{(\theta, \phi, t) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, T)} \|u(\cdot, \theta, \phi, t)\|_{H^p([0; a])} \leq K, \tag{3.8}$$

trong đó,

$$\|u(\cdot, \theta, \phi, t)\|_{H^p([0; a])} = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (1 + \lambda_{n,j}^2)^{p/2} A_{jnm}(t) j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2.$$

Với hai điều kiện trên, chúng tôi đưa ra ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa qua định lí sau.

Định lí 3.1. Với f, f^ε thỏa điều kiện H_1 , $0 < \varepsilon < \min\{1, T\}$ và $\alpha = \varepsilon$. Giả sử rằng $u(r, \theta, \phi, t)$ và $u^\varepsilon(r, \theta, \phi, t)$, được cho bởi (3.1) và (3.5), lần lượt là nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa tương ứng với dữ liệu đo f^ε . Với $(\theta, \phi, t) \in (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, T)$, chúng tôi có đánh giá sau:

$$\|u^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - u(\cdot, \theta, \phi, t)\|_2 \leq T_k \left(\ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{-1} M(\varepsilon), \tag{3.9}$$

trong đó, $T_k = \max\{1; F(T) + k\}$ và

$$M(\varepsilon) = \left(\varepsilon \ln \left(\frac{F(T) + k}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{F(T)+k}{F(T)+k}} + C(p, F(T) + k)K.$$

Chứng minh.

Chứng minh của định lí này được chia thành hai phần. Trong phần 1, từ (3.5), (3.6) và Bổ đề 3.1, chúng tôi có đánh giá sau:

$$\begin{aligned} & \|u^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - v^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t)\|_2 \\ & \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}}{\alpha \lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2 (F(T) + k)\}} (f_{jnm}^\varepsilon - f_{jnm}) j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq T_k \left(\alpha \ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (f_{jnm}^\varepsilon - f_{jnm}) j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2 \\
 &\leq T_k \left(\alpha \ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1} \left\| f^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi) - f(\cdot, \theta, \phi) \right\|_2 \\
 &\leq T_k \left(\alpha \ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1} \varepsilon.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Trong phần hai, từ (3.1) và (3.6), chúng tôi có được:

$$\begin{aligned}
 &A_{jnm}(t) - B_{jnm}(t) \\
 &= \left(\exp\{\lambda_{n,j}^2(F(T) - F(t))\} - \frac{\exp\{-\lambda_{n,j}^2(F(t) + k)\}}{\alpha\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2(F(T) + k)\}} \right) f_{jnm}, \\
 &= \frac{\alpha\lambda_{n,j}^2 \exp\{\lambda_{n,j}^2(F(T) - F(t))\}}{\alpha\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2(F(T) + k)\}} f_{jnm}.
 \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 iii), chúng tôi có

$$\begin{aligned}
 &\left\| v^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - u(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_2 \\
 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\alpha\lambda_{n,j}^2}{\alpha\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2(F(T) + k)\}} \exp\{\lambda_{n,j}^2(F(T) - F(t))\} \right. \\
 &\quad \left. \times f_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2 \\
 &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\alpha\lambda_{n,j}^2 (1 + \lambda_{n,j}^2)^{-p/2}}{\alpha\lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2(F(T) + k)\}} \right. \\
 &\quad \left. \times (1 + \lambda_{n,j}^2)^{p/2} A_{jnm}(t) j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2 \\
 &\leq \alpha C(p, F(T) + k) \frac{T_k}{\alpha} \left(\ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{-1} \\
 &\quad \times \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (1 + \lambda_{n,j}^2)^{p/2} A_{jnm}(t) j_n(\lambda_{n,j} \cdot) Y_{n,m}(\theta, \phi) \right\|_2 \\
 &\leq C(p, F(T) + k) T_k \left(\ln \left(\frac{F(T) + k}{\alpha} \right) \right)^{-1} K,
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

trong đó, $C(p, F(T) + k) = \left(\frac{p-2}{2(F(T)+k)} \right)^{1-p/2}$.

Bằng bất đẳng thức tam giác, kết hợp (3.10), (3.11) và chọn $\alpha = \varepsilon$, chúng tôi suy ra được đánh giá sau:

$$\begin{aligned} & \left\| u^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - u(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_2 \\ & \leq \left\| u^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - v^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_2 + \left\| v^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - u(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_2 \\ & \leq T_k \varepsilon^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}} \left(\ln \left(\frac{F(T)+k}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1} + C(p, F(T)+k) T_k \left(\ln \left(\frac{F(T)+k}{\varepsilon} \right) \right)^{-1} K \\ & \leq T_k \left(\ln \left(\frac{F(T)+k}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1} \left(\varepsilon^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}} + C(p, F(T)+k) K \right). \end{aligned}$$

Từ đó, chúng tôi có được đánh giá (3.9). Chú ý rằng $\varepsilon \ln \left(\frac{F(T)+k}{\varepsilon} \right)$ sẽ hội tụ về

0 khi ε tiến về 0.

Kết thúc chứng minh Định lí 3.1.

Chú ý 3.1. Nếu $p=2$, điều kiện H_2 trở thành

$$\left\| u(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_{H^2([0;a])} \leq K,$$

Hơn nữa, $C(p, F(T) + k) = C(2, F(T) + k) = 0$. Điều này dẫn đến ước lượng sai số (3.9) trở thành

$$\left\| u^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi, t) - u(\cdot, \theta, \phi, t) \right\|_2 \leq T_k \varepsilon^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}} \left(\ln \left(\frac{F(T)+k}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{F(t)+k}{F(T)+k}-1}.$$

Đây là sai số dưới dạng kết hợp logarit và Hölder nhanh hơn dạng logarit của (3.9).

Chú ý 3.2. Dựa vào (3.9), chúng ta có thể thấy rằng k càng lớn thì tốc độ hội tụ của nghiệm chính hóa càng tốt.

4. Ví dụ số

Trong chương này, chúng tôi xét bài toán cụ thể sau:

$$u_t = a(t) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + \csc^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right) \right\}, \quad (4.1)$$

$$u(a, \theta, \phi, t) = 0, \quad (4.2)$$

$$u(r, \theta, \phi, T) = f(r, \theta, \phi), \quad (4.3)$$

trong đó, $(r, \theta, \phi, t) \in (0, 1) \times (0, \pi) \times (0, 2\pi) \times (0, 1)$ và

$$f(r, \theta, \phi) = 10^{10} j_{12}(\alpha_{25/2,1} r) [Y_{12,-12}(\theta, \phi) + Y_{12,12}(\theta, \phi)], \quad (4.4)$$

$$a(t) = \frac{1}{50} \left(t + \frac{1}{10} \right),$$

Chúng ta có được

$$Y_{12,12}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{25}{24! 4\pi}} P_{12}^{12}(\cos \theta) e^{i12\phi},$$

$$P_{12}^{12}(x) = (-1)^{12} (1-x^2)^6 \frac{d^6 P_{12}(x)}{dx^6},$$

$$P_{12}(x) = \frac{1}{2^{12}} \sum_{m=0}^6 (-1)^m \frac{(24-2m)!}{m!(12-m)!(12-2m)!} x^{12-2m},$$

$$Y_{12,-12}(\theta, \phi) = (-1)^{12} \bar{Y}_{12,12}(\theta, \phi).$$

Từ đó, chúng tôi thu được nghiệm chính xác u tương ứng với dữ liệu chính xác (4.4) như sau:

$$u(r, \theta, \phi, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \exp\{\lambda_{n,j}^2 (F(1) - F(t))\} f_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta, \phi),$$

Xét dữ liệu đo sau

$$f^\varepsilon(r, \theta, \phi) = (1 + \varepsilon \cdot \text{rand}(\cdot)) f(r, \theta, \phi), \quad (4.5)$$

trong đó, $\text{rand}(\cdot) \sim N(0, 1)$. Từ (4.4) và (4.5), ta có

$$\|f^\varepsilon(\cdot, \theta, \phi) - f(\cdot, \theta, \phi)\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ngoài ra, từ (3.5), (4.5) và chọn $k_1 = 0$, $k_2 = \frac{1}{3}$, chúng tôi đưa ra các nghiệm chính

hóa u^{ε, k_1} và u^{ε, k_2} lần lượt tương ứng với k_1, k_2 như sau:

$$\begin{aligned}
 & u^{\varepsilon, k_1}(r, \theta, \phi, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(1 + \varepsilon \cdot \text{rand}(\cdot)) \exp\{-\lambda_{n,j}^2 F(t)\}}{\varepsilon \lambda_{n,j}^2 + \exp\{-\lambda_{n,j}^2 F(1)\}} f_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta, \phi),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

và

$$\begin{aligned}
 & u^{\varepsilon, k_2}(r, \theta, \phi, t) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{(1 + \varepsilon \cdot \text{rand}(\cdot)) \exp\left\{-\lambda_{n,j}^2 \left(F(t) + \frac{1}{3}\right)\right\}}{\varepsilon \lambda_{n,j}^2 + \exp\left\{-\lambda_{n,j}^2 \left(F(1) + \frac{1}{3}\right)\right\}} f_{jnm} j_n(\lambda_{n,j} r) Y_{n,m}(\theta, \phi),
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Chúng tôi đưa ra các tính toán sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm xấp xỉ tại các giá trị của t . Chi tiết hơn, chúng tôi lấy ε lần lượt là $\varepsilon_i = 10^{-i}, i = 1, 4, t \in \{0; 0.5\}$ và $(\theta, \phi) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. Các bảng sau đây thể hiện các tính toán sai số của cả hai trường hợp $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{3}$.

Bảng 1. Ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa u^{ε, k_1} trong trường hợp $(\theta, \phi) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ và $k_1 = 0$

	$\left\ u^{\varepsilon, k_1} \left(\cdot, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, t \right) - u \left(\cdot, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, t \right) \right\ _2$			
t	$\varepsilon_1 = 10^{-1}$	$\varepsilon_2 = 10^{-2}$	$\varepsilon_3 = 10^{-3}$	$\varepsilon_4 = 10^{-4}$
0	3.1297×10^{-1}	3.1206×10^{-1}	3.0320×10^{-1}	2.3617×10^{-1}
0.5	6.4538×10^{-4}	6.4350×10^{-4}	6.2524×10^{-4}	4.8700×10^{-4}

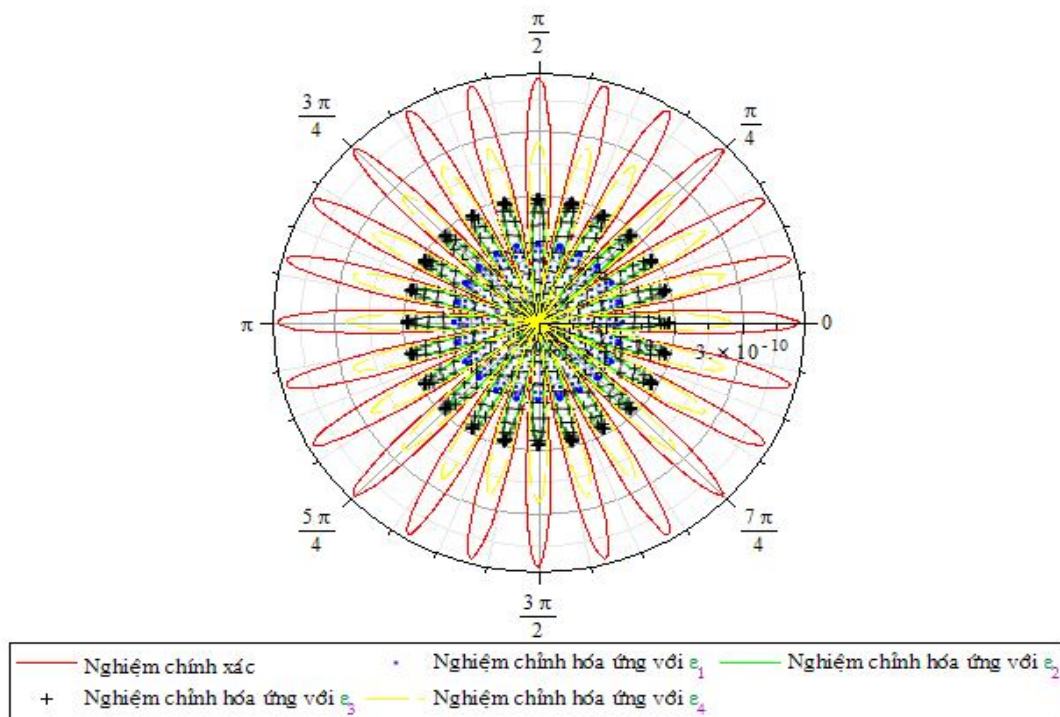
Bảng 2. Ước lượng sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa u^{ε, k_2} trong trường hợp $(\theta, \phi) \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ và $k_2 = \frac{1}{3}$

	$\left\ u^{\varepsilon, k_2} \left(\cdot, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, t \right) - u \left(\cdot, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, t \right) \right\ _2$			
t	$\varepsilon_1 = 10^{-1}$	$\varepsilon_2 = 10^{-2}$	$\varepsilon_3 = 10^{-3}$	$\varepsilon_4 = 10^{-4}$
0	1.0669×10^{-1}	1.0649×10^{-1}	9.2697×10^{-2}	9.2028×10^{-2}
0.5	5.6685×10^{-4}	5.5152×10^{-4}	5.4914×10^{-4}	5.3310×10^{-4}

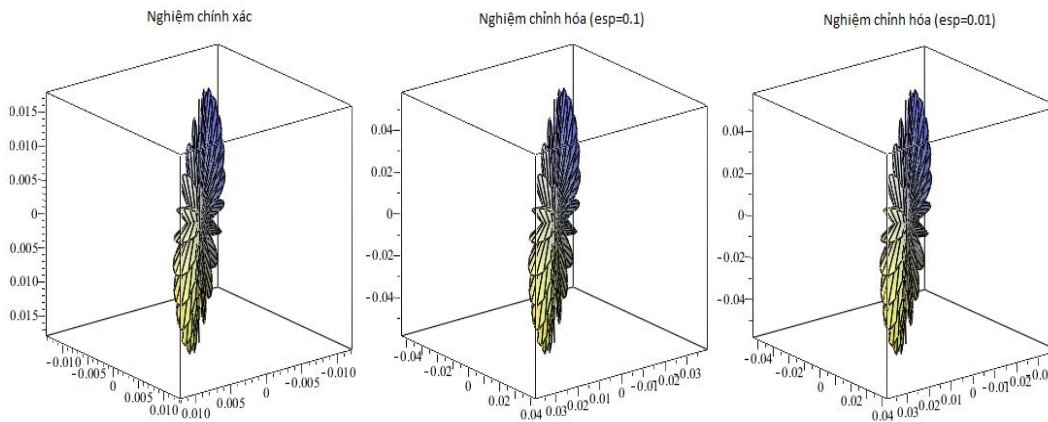
Tiếp theo, Hình 1 thể hiện nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa u^{ε_i, k_2} , $i = \overline{1,4}$ tại thời điểm $t=0$ trong trường hợp $r=1$ và $\theta = \frac{\pi}{6}$. Sau cùng, chúng tôi vẽ đồ thị nghiệm chính xác u và các nghiệm chỉnh hóa u^{ε_i, k_2} , $i = \overline{1,4}$ tại thời điểm $t=0$ với $\theta = \frac{\pi}{6}$ trong Hình 2, Hình 3.

5. Kết luận

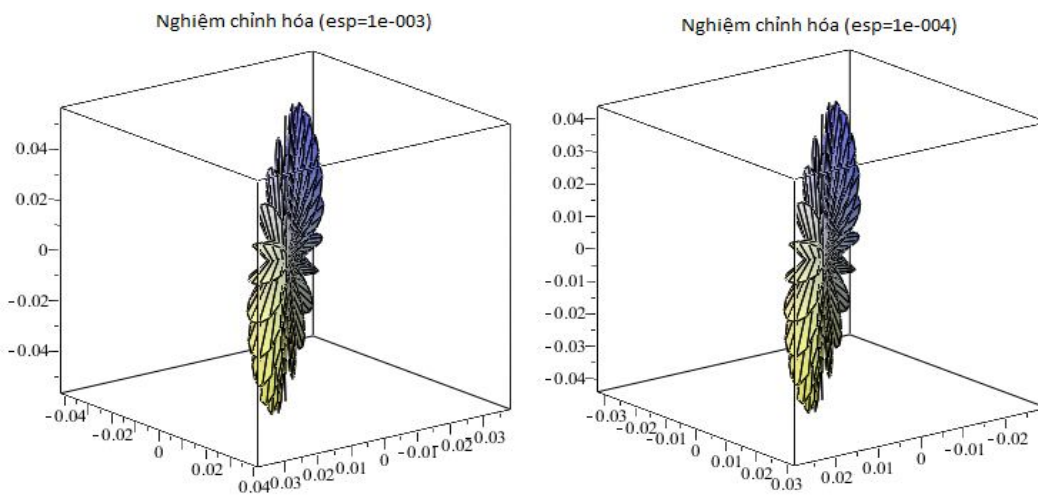
Trong bài báo này, chúng tôi đã nghiên cứu một bài toán nhiệt không đối xứng trong tọa độ cầu bằng phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh. Với phương pháp này, chúng tôi đã đưa ra ước lượng sai số dạng Hölder kết hợp logarit trong Chương 3. Hơn nữa, trong Chương 4, Bảng 1 và 2 đã minh họa cho Chú ý 3.2. Một điểm yếu của bài báo là chúng tôi xét bài toán trong trường hợp thuần nhất. Do đó, trong những công trình tiếp theo, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu bài toán này trong trường hợp không thuần nhất.



Hình 1. Nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa tại $t=0$, $r=1$ và $\theta = \frac{\pi}{6}$



Hình 2. Nghiệm chính xác và các nghiệm chỉnh hóa u^{ϵ_1, k_2} , $i = 1, 2$ tại $t=0$, $\theta = \frac{\pi}{6}$



Hình 3. Các nghiệm chỉnh hóa u^{ϵ_1, k_2} , $i = 3, 4$ tại $t=0$, $\theta = \frac{\pi}{6}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Beskos, D. E., (1997), "Boundary element method in dynamic analysis: Part II", *Applied Mechanics Review*, 50, pp. 149-197.
2. Chen, J. T. & Wong, F. C., (1998), "Dual formulation of multiple reciprocity method for the acoustic mode of a cavity with a thin partition", *Journal of Sound and Vibration*, 217, pp. 75-95.

3. Cheng, W. & Fu, C. L., (2009), “A spectral method for an axisymmetric backward heat equation”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 17(8), pp. 1085-1093.
4. Cheng, W. & Fu, C. L., (2010), “A modified Tikhonov regularization method for an axisymmetric backward heat equation”, *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 26(11), pp. 2157-2164.
5. Cheng, W., Ma, Y.-J. & Fu, C. L., (2014), “A regularization method for solving the radially symmetric backward heat conduction problem”, *Applied Mathematics Letters*, 30, pp. 38-43.
6. Denche, M. & Djeddar S., (2006), “A modified quasi-boundary value method for a class of abstract parabolic ill-posed problems”, *Hindawi Publishing Corporation Boundary Value Problems*, 2006, Article ID 37524, pp.1-8.
7. Edmund, Y. M. C., (2008), *A brief introduction to Bessel and related special functions*, Math306 supplementary material.
8. Frank, B. (1958), *Introduction to Bessel functions*, Dover publications Inc., New York.
9. Fu, C. L., Xiong, X. T. & Qian, Z., (2007), “Fourier regularization for a backward heat equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, 331, pp. 472-480.
10. Gun, S. et al., (2009), “Linear independence of digamma function and a variant of a conjecture of Rohrlich”, *J. Number Theory*, doi:10.1016/j.jnt. 2009.02.007.
11. Nakhlé, H. A., (2005), *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems, second edition*, University of Missouri, New Jersey.
12. Neta, B., (2002), *Partial differential equation MA 3132 Lecture Notes*, Department of Mathematics Naval Postgraduate School, Monterey, California.
13. Quan, P. H., Trong, D. D., Triet, L. M. & Tuan, N. H. (2011), “A modified quasi-boundary value method for regularizing of a backward problem with time-dependent coefficient”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 19(3), pp. 409-423.
14. Trong, D. D. & Tuan, N. H. (2008), “Stabilized quasi-reversibility method for a class of nonlinear ill-posed problems”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008(84), pp.1-12.
15. Trong, D. D., Quan, P. H. & Tuan, N. H. (2009), “A quasi-boundary value method for regularizing nonlinear ill-posed problems”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2009(109), pp. 1-16.
16. Trong, D. D. & Tuan, N. H. (2008), “A nonhomogeneous backward heat problem: Regularization and error estimates”, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2008(33), pp. 1-14.

17. Tuan, N. H. & Trong, D. D. (2011), “A note on a nonlinear backward heat equation Stability and error estimates”, *Acta Universitatis Apulensis*, 2011(28), pp. 279-292.
18. Z. Qian, C. -L. Fu & X. -T. Xiong (2008), “Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation”, *J. Math. Anal. Appl.*, 338, pp. 479-489.
19. Watson, G. N. (1966), *A treatise on the theory of bessel functions 2nd edition*, Cambridge, the University Press.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 14-11-2016; ngày phân biện đánh giá: 25-11-2016;
ngày chấp nhận đăng: 16-12-2016)