CÁC NGUYÊN LÍ TOÁN HỌC QUAN TRỌNG CỦA THỊ TRƯỜNG TÀI CHÍNH

NGUYỄN CHÍ LONG*

TÓM TẮT

Đến cuối tháng 6 năm 2013, ngành công nghiệp phái sinh tài chính thế giới, có giá trị danh nghĩa khoản 700.000 tỉ Dollar Mĩ và ngành công nghiệp quản trị danh mục đầu tư, có lẽ có giá trị còn lớn hơn. Do đó, toán học tài chính là ngành quan trọng của toán ứng dụng. Mục đích của bài báo này là tóm tắt các nguyên lí toán học quan trọng nhất trong thị trường tài chính.

Từ khóa: toán tài chính, lí thuyết định giá tài sản, thị trường đầy đủ.

ABSTRACT

The important mathematical principles of financial markets

The derivatives industry worth totals in notional amount more than 700 trillion USD at end-June 2013 and the portfolio management industry is probably even bigger. Therefore, the financial mathematics is an important branch of applied mathematics. The aim of this article is to summarize the most important mathematical principles in financial markets.

Keywords: Mathematical Finance, Theory of asset pricing, Complete market.

1. Giới thiệu

Hầu hết các mô hình toán trong ngành tài chính đều bắt nguồn từ luận án Tiến sĩ năm 1900 của Louis Bachelier (1870-1946) có tên "Lí thuyết đầu cơ tài chính (Theory de speculation)" tại Đại học Sorbonne (Paris), dưới sự hướng dẫn của nhà toán học lừng danh Henri Poincare'.

Luận án này được nhiều nhà khoa học thừa nhận là công trình khai sinh của ngành toán tài chính. Tuy nhiên cho đến hơn nữa thế kỷ sau, các nhà toán học nghiên cứu ứng dụng trong tài chính mới biết đến công trình này. Năm 1953, Harry Markovitz và James Tobin đã đưa ra lí thuyết "Lựa chọn danh mục đầu tư" tài chính qua việc phân tích trung bình phương sai trong lí thuyết xác suất. Năm 1965, các nhà kinh tế học Paul Samuelson và Henry McKean đã chứng tỏ rằng giá cổ phiếu chứng khoán tăng giảm có tính ngẫu nhiên và mô hình tốt nhất diễn tả sự thay đổi của giá cổ phiếu là mô hình chuyển động Brown hình học. Nhưng cột mốc quan trọng, đánh dấu thời kì phát triển mạnh mẽ của toán tài chính là sự ra đời của mô hình Black-Scholes năm 1973 về tính hợp lí giá của các quyền chọn (Pricing of Options and Corporate Liabilities). Fisher Black và Myron S. Scholes, cùng với nhà kinh tế học làm việc độc lập Robert Merton đưa ra công thức tính giá các quyền chọn. Giải Nobel kinh tế 1997 được trao cho R. C. Merton và M. S. Scholes (lúc đó Black đã mất). Phương pháp của họ đã mở

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: nguyen.c.long@gmail.com*

đường cho việc xác định giá trị kinh tế trong nhiều lĩnh vực, tạo ra nhiều loại công cụ tài chính mới và tạo điều kiện cho việc quản trị rủi ro trong xã hội hiệu quả hơn. Giải Nobel kinh tế năm 2003 dành cho Clive Grange về phương pháp phân tích kinh tế qua chuỗi thời gian và Robert F. Engle III về mô hình dao động ngẫu nhiên. Ngành công nghệ phái sinh tài chính thế giới ước tính khoảng 700.000 tỉ đô la trong năm 2013 và ngành quản trị danh mục đầu tư tài chính có lẽ có giá trị còn cao hơn, điều này cho thấy tầm quan trọng của ngành toán học tài chính hiện đại.

Tại Việt Nam, toán tài chính chỉ được quan tâm và nghiên cứu khoảng hơn 10 năm gần đây, nhưng số người nghiên cứu, quy mô, tài liệu còn quá nhỏ, chưa đáp ứng được yêu cầu hội nhập của Việt Nam vào nền kinh tế thế giới. Đặc biệt là công tác đào tạo chưa đáp ứng được nhu cầu về nhân sự của các công ty tài chính và chứng khoán thành lập ở Việt Nam. Do đó các thuật ngữ, khái niệm, các nguyên lí căn bản của toán tài chính cần được làm sáng tỏ và trình bày chặc chẽ, có tính sư phạm để giúp các sinh viên, học viên cao học, các nghiên cứu sinh dễ tiếp cận, từ đó quan tâm nghiên cứu lĩnh vực mới và đặt biệt quan trọng này.

2. Một số khái niệm cơ bản

Chúng ta xét thị trường tài chính một chu kì tổng quát, mà nhà đầu tư (NĐT) được phép đầu tư trong tài khoản ngân hàng (tài khoản tiết kiệm) và một tập hợp hữu hạn các cổ phiếu chứng khoán $S^1,...,S^N$. Giá của cổ phiếu thứ i, S^i tại thời điểm t = 0 là S_0^i, và tại thời t = 1 là S_1^i. Giả sử rằng, tại thời điểm t = 1, thế giới tài chính có thể ở một trong k trạng thái $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k$ với xác suất dương $P(\omega_i) > 0,\ i = 1, ..., k$. Do đó, thế giới tài chính có không gian trạng thái là: $\Omega := \{\omega_1, ..., \omega_k\}$. Giá cổ phiếu $S_1^i : \Omega \to \mathbb{R}$ được xem như một biến ngẫu nhiên xác định trên không gian xác suất (Ω, F, P), trong đó F:= {A : A ⊂ Ω}. Vậy $S_1^i(\omega)$ là giá của cổ phiếu thứ i, tại thời điểm t = 1 khi thế giới tài chính ở trang thái ω ∈ Ω. Dĩ nhiên mô hình tài chính một chu kì là không thực tế, nhưng nó như tế bào trong môt cấu trúc kinh tế, cho phép chúng ta hiểu và giải thích nhiều nguyên lí quan trọng trong toán tài chính.

Giá trị thời gian của tiền tệ: 1 USD trong tay hôm nay thì có giá trị hơn sự kì vọng nhận được 1 USD ở một ngày nào đó trong tương lai, do đó việc vay tiền không thể tự do. Người vay phải trả chi phí, được gọi là lãi suất, cho người cho vay. Gọi r > 0 là lãi bội rời rạc không rủi ro, mà một đơn vị tiền tệ được gửi trong tài khoản ngân hàng sẽ tăng thành (1 + r) đơn vị trong một chu kì thời gian T. Khấu hao giá trị tiền theo thời gian với thừa số khấu hao $c := \frac{1}{1+r}$ cho phép ta so sánh giá trị tiền tệ ở những thời điểm khác nhau. Vậy một số tiền X tại thời điểm T có thể xem như là số tiền cX ngày hôm nay.

Một chiến lược kinh doanh (hay một phương án đầu tư) là một cặp (x, H), trong đó $H = (H_0, H_1, ..., H_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ (đôi khi để đơn giản ta viết một chiến lược kinh doanh là

H) là một véc tơ (N + 1)chiều, x là tổng số vốn ban đầu (tại thời điểm t = 0) và $H_i, i = 1, 2, \ldots$, N là số lượng cổ phiếu của chứng khoán thứ i. Giả sử rằng $S_0^0 = 1$ và $S_1^0 = 1 + r$. Cho trước một chiến lược kinh doanh (x;H) như trên, ta luôn giả sử rằng số tiền còn lại $x - \left(H_1 S_0^1 + H_2 S_0^2 + \ldots + H_N S_0^N\right) \equiv H_0$ được đầu tư không rủi ro trong tài khoản ngân hàng. Vậy giá trị $V_0(x, H)$ của (x, H) tại thời điểm $t = 0$ được cho bởi

$$V_0(x, H) := \sum_{i=0}^{H} H_i S_0^i = x$$

Giá trị $V_1(x, H)$ của chiến lược kinh doanh (x, H) tại thời điểm t = 1 là một biến ngẫu nhiên

$$V_1(x, H) := \sum_{i=0}^{N} H_i S_1^i \qquad (1)$$

Quá trình lãi (hoặc lỗ) G(x, H) được định nghĩa bởi

$$G(x, H) = H_0 r + \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta S^i \qquad (2)$$

trong đó $\Delta S^i := S_1^i - S_0^i$ là sự thay đổi của giá cổ phiếu chứng khoán thứ i.

Dễ dàng kiểm chứng rằng

$$V_1(x, H) = V_0(x, H) + G(x, H)$$

Quá trình giá cổ phiếu khấu hao được định nghĩa

$$\hat{S}_0^i := S_0^i \quad \text{and} \quad \hat{S}_1^i := c S_1^i$$

Khi i = 1,..., N. Và quá trình giá khấu hao tương ứng của (x, H) là

$$\hat{V}_0(x, H) := x \quad \text{and} \quad \hat{V}_1(x, H) := H_0 + \sum_{i=1}^{N} H_i \hat{S}_1^i$$

Quá trình lãi khấu hao $\hat{G}(x, H)$ là biến ngẫu nhiên

$$\hat{G}(x, H) := \sum_{i=1}^{N} H_i \Delta \hat{S}^i$$

Với $\Delta \hat{S}^i := \hat{S}_1^i - \hat{S}_0^i$. Bằng phép tính đơn giản ta có

$$\hat{V}_0(x, H) := V_0(x, H) \quad \text{and} \quad \hat{V}_1(x, H) = c V_1(x, H)$$

$$\hat{V}_1(x, H) = \hat{V}_0(x, H) + \hat{G}(x, H)$$

Định nghĩa 1.

Một chiến lược kinh doanh (x, H) vớ i $H = (H_0, H_1, \ldots, H_N)$ *được gọi là có cơ hội chênh lệch thị giá (hay gọi tắt là chênh lệch thị giá) nếu*

1. $x = V_0(x, H) = 0$.

2. $V_1(x,\ H) \geq 0$.

3. $E\left[V_1(x,H)\right] := \sum_{i=1}^{N} P(\omega_i)V_1(x,H)(\omega_i) > 0$. *Điều kiện này thì tương đương với: Tồn tại ω ∈ Ω sao cho* $V_1(x,H)(\omega) > 0$.

Ghi chú 1. Vì $c := \frac{1}{1+r} > 0$, nên dễ dàng suy ra kết quả (x, H) là một chiến lược kinh doanh chênh lệch thị giá nếu và chỉ nếu

1. $V^0(x,\ H) = 0$.
2. $V^1(x,\ H) \geq 0$.
3. $E\left[V^1(x,\ H)\right] > 0$.

Bằng sự tính toán đơn giản chúng ta cũng có kết quả sau: một chiến lược kinh (x, H) có cơ hội chênh lệch thị giá nếu và chỉ nếu

$$\hat{G}(x,H) \geq 0 \qquad (3)$$

$$E[\hat{G}(x,H)] > 0 \qquad (4)$$

Một cách trực giác, chiến lược đầu tư có cơ hội chênh lệch thị giá là chiến lược đầu tư không gặp bất cứ rủi ro nào, và xác suất kiếm được lợi nhuận là dương. Sự hiện hữu của một cơ hội chênh lệch thị giá như vậy có thể xem là thị trường tài chính không hiệu quả, theo nghĩa là chắc chắn tài sản không được định giá một cách hợp lí. Trong các thị trường thực tế, cơ hội chênh lệch thị giá rất hiếm khi tìm thấy. Do đó, sự vắng mặt của cơ hội chênh lệch thị giá sẽ là giả thiết then chốt.

Sự vắng mặt của cơ hội chênh lệch thị giá dẫn đến S_1^i triệt tiêu P-hkn khi $S_0^i = 0$. Do đó không mất tính tổng quát nếu chúng ta giả sử rằng

$$S_0^i > 0, \quad i = 1, 2, ..., N \qquad (5)$$

Bổ đề sau đâu chứng tỏ rằng, khi không xuất hiện cơ hội chênh lệch thị giá, thì thị trường có tính chất sau: Mọi đầu tư vào tài sản rủi ro mà nó có kết quả tốt hơn đầu tư ở tài sản không rủi ro, thỏa mãn với xác suất dương, thì chiến lược đầu tư này phải chấp nhận nhược điểm là có thể gặp rủi ro.

Bổ đề 1.

Các phát biểu sau đây là tương đương nhau

(a) Thị trường tài chính có cơ hội chênh lệch thị giá.

(b) Có một véc tơ $H^1 = (H_1,\ ...,\ H_N) \in \mathbb{R}^N$ *sao cho*

$$H^1S_1 := \sum_{i=1} H_iS_1^i \geq (1+r)H^1S_0 := (r+1)\sum_{i=1}^{N} H_iS_0^i \quad P-a.s. \qquad (6)$$

Và $P[H^1S_1 > (r+1)H^1S_0] > 0$.

Chứng minh.

Để chứng minh (a) suy ra (b), lấy (x, H) với $H=\left(H_0,\ H^1\right)=\left(H_0,H_1,\ldots,\ H_N\right)$ là phương án đầu tư có cơ hội chênh lệch thị giá, thì

$$0\ge V_0(x,H)\equiv H_0+H^1S_0 \qquad (7)$$

Do đó,

$$H^1S_1-(1+r)H^1S_0\ge H^1S_{\cdot}+(1+r)H_0\equiv V_1(x,H) \qquad (8)$$

Vì $V_1\left(x,H\right)$ không âm P-hầu khắp nơi và dương ngặt với xác suất dương, do đó ta cũng có kết quả tương tư cho $H^1S_1-\left(1+r\right)H^1\ S_0$.

Chứng minh (b) suy ra (a): Lấy $H=\left(H_0,H^1\right)$ với $H^1=\left(H_1,\ldots,H^N\right)$ như trong (b). Ta khẳng định rằng phương án đầu tư (x, H) với $H_0=-H_1S_1$ là một phương án chênh lệch thị giá. Thật vậy, $V_0\left(x,H\right)=H_0+H^1S_0=0$ theo định nghĩa. Mặt khác, $V_1\left(x,H\right)=H_0\left(1+r\right)+H^1S_1=-\left(1+r\right)H^1S_0+H^1S_1$ mà nó không âm hầu khắp nơi và dương ngặt với xác suất dương. □

Định nghĩa 2.

Một độ đo xác suất □ *trên (Ω, F, P) được gọi là độ đo* ***rủi ro trung tính*** *hay* ***độ đo martingale*** *nếu*

1. □ $(\omega)>0$, *Với mọi* $\omega\in\Omega$ *và*

2. $E_{\square}\left[cS_1^i\right]=S_0^i,\ i=1,2,\ldots,N$ *Điều kiện này thì tương đương với với điều kiện* $E_{\square}\left[\Delta\hat{S}^i\right]=0,\ i=1,2,\ldots,N.$

Ví dụ 1. (Mô hình thị trường tài chính, hai trạng thái, một chu kì).

Xét mô hình tài chính rất đơn giản gồm hai trạng thái và một chu kì như sau

- Một tập hợp thời gian giao dịch $T:=\{0;1\}$. Thời điểm hiện tại là t = 0, thời điểm bắt đầu giao dịch và thời điểm T = 1 là thời điểm đáo hạn, kết thúc giao dịch. Tại thời điểm T = 1 giả sử rằng không gian tài chính chỉ gồm hai trạng thái (hay kịch bản): Ω := {ω_1, ω_2}, ω_1 biểu diễn thị trường tốt, và ω_2 biểu diễn thị trường xấu.
- Độ đo xác suất P trên Ω xác định bởi

  $P(\omega_1)$ = p, $(0<p<1)$ và $P(\omega_2)$ = 1 − p ≡ q.

Ta định nghĩa $u:=\dfrac{S_1(\omega_1)}{S_0}$; $d:=\dfrac{S_1\left(\omega_2\right)}{S_0}$ và giả sử rằng $0<d<1<u$. Điều này có nghĩa là giá chứng khoán có thể lên khi ω_1 xảy ra và giảm khi ω_2 xảy ra, nhưng trong mọi trường hợp u và d vẫn dương. Ta nói rằng thị trường không chênh lệch giá (arbitrage free) nếu không có cơ hội chênh lệch thị giá trong mô hình.

Mệnh đề 1.

Mô hình tài chính hai trạng thái, một chu kì là không chênh lệch giá nếu và chỉ nếu $d < 1 + r < u$.

Chứng minh. Xem [5]

Gọi P_N là tập hợp tất cả các độ đo xác suất rủi ro trung tính mà nó tương đương với độ đo P. Nhắc lại rằng hai độ đo Q và P được gọi là tương đương nhau ($Q \sim P$) nếu, Với $A \in F$, $Q(A) = 0$ nếu và chỉ nếu $P(A) = 0$.

3. Nguyên lí định giá tài sản

Định lí sau đây là một trong những nguyên lí quan trọng nhất của ngành toán học tài chính

Định lí 1. **(Nguyên lí định giá tài sản)**

Mô hình tài chính một chu kì tổng quát là không chênh lệch giá nếu và chỉ nếu $P_N \neq \varnothing$.

Chứng minh. Xem [3].

4. Nguyên lí thị trường đầy đủ

Một **quyền chọn** hay một **quyền tài chính** (a contingent claim) (còn được gọi là sản phẩm phái sinh (derivatives)) là một biến ngẫu nhiên X, xác định trên không gian tài chính cơ sở (Ω, F, P), biểu diễn thu hoạch của nhà đầu tư tại thời điểm đáo hạn T=1. Chú ý rằng một quyền chọn là một hợp đồng tài chính giữa người mua và người bán, kí tại thời điểm t = 0. Người bán cam kết sẽ trả cho người mua một số tiền $X(\omega)$ tại thời điểm T = 1 nếu $\omega \in \Omega$ là trạng thái tài chính lúc này. Do đó, khi xem xét tại thời điểm t = 0 thì thu hoạch X là một biến ngẫu nhiên, và vấn đề được quan tâm là: xác định, tại thời điểm t = 0, giá trị của thu hoạch X này.

Định nghĩa 3.

Cho X là một quyền tài chính, một phương án đầu tư (x, H) được gọi là phương án đáp ứng (a replicating strategy) hay một bảo hộ (a hedge) cho X nếu $V_1(x, H) = X$ *tại thời điểm t = 1.*

Định nghĩa 4.

*Một quyền tài chính X được gọi là **đạt được** (attainable) hay **mua bán được** (marketable) nếu có một phương án đầu tư (x, H) bảo hộ cho X (nghĩa là* $V_1(x, H) = X$*). Thị trường tài chính được gọi là đầy đủ (complete) nếu mỗi quyền tài chính X, đều có thể tìm được phương án đầu tư (x, H) bảo hộ cho X.*

Ta có một nguyên lí quan trọng tính toán giá trị của quyền tài chính X tại thời điểm t = 0 (được gọi là nguyên lí giá trị rủi ro trung tính (Risk neutral valuation principle)), qua định lí sau

Định lí 2. **(**Risk neutral valuation principle)

Nếu thị trường tài chính một chu kì tổng quát không chênh lệch giá, thì giá trị của một quyền tài chính mua bán được X tại thời điểm kí hợp đồng, t = 0, có thể được tính qua công thức

$$V_0 = E_{\mathbb{Q}}\left[cX\right] \qquad (9)$$

trong đó $\mathbb{Q}$ *đo xác suất rủi ro trung tính bất kì.*

Chứng minh. Lấy (x, H) là một chiến lược đầu tư bảo hộ X, $\text{i.e.} V_1(x,H) = X$ và $\mathbb{Q} \in P_N$, ta có

$$\begin{aligned} V_0 = \hat{V}_0 &= E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_0] = E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_1 - \hat{G}] \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_1] - E_{\mathbb{Q}}[\sum_{i=1}^{N} H_i \Delta\hat{S}^i] \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_1] - \sum_{i=1}^{N} H_i E[\Delta\hat{S}^i] \\ &= E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_1] - 0 = E_{\mathbb{Q}}[\hat{V}_1] = E_{\mathbb{Q}}[cX] \end{aligned}$$

Ghi chú 2. Trong thị trường tài chính lành mạnh (nghĩa là không có chênh lệch giá), nếu X là một quyền tài chính và (x, H) là phương án đầu tư đáp ứng cho X, thì x là giá của quyền tài chính X tại thời điểm hiện tại $t = 0$.

Ví dụ 2. (tiếp theo ví dụ 1) Ta xét một quyền tài chính là quyền chọn mua kiểu châu Âu (viết tắc QCMKCA). QCMKCA là một hợp đồng kí kết giữa bên viết hợp đồng (để bán) và bên mua hợp đồng (giữ nó) trên cơ sở tài sản cơ bản (như chứng khoán, trái phiếu, các loại tiền tệ…), quy định người giữ hợp đồng có quyền, nhưng không bắt buộc mua tài sản trong thời điểm đáo hạn trong tương lai T với một giá thực thi quy định trước là K. Tài sản, thời điểm đáo hạn T và giá thực thi K là các yếu tố quan trọng của hợp đồng này. Người giữ hợp đồng sẽ làm như sau ở thời điểm đáo hạn: Nếu giá chứng khoán S_1 tại thời điểm T = 1 cao hơn K thì người giữ hợp đồng sẽ mua của người viết hợp đồng và đem bán ngay lại cho thị trường tài chính với giá S_1 và thu được món lợi là $S_1 - K$. Nếu giá chứng khoán khoán S_1 tại thời điểm T = 1 thấp hơn K thì người giữ hợp đồng sẽ không thực thi, vì đơn giản là giá bên ngoài thị trường rẻ hơn. Trong trường hợp này, người giữ hợp đồng không thu được món lợi nào. Vì lí do trên nên ta có thể xem QMKCA là một tài sản mà lợi nhuận của nó tại thời điểm đáo hạn T = 1 là $\max\left(S_1 - K, 0\right)$. Câu hỏi tự nhiên là: Giá của một QMKCA tại thời điểm t = 0 là bao nhiêu? Lời đáp của câu hỏi này là một áp dụng của nguyên lí đáp ứng để bảo hộ (Replication Principle) mà ta xem xét sau đây.

Giả sử ta có một quyền tài chính tổng quát hơn một QCMKCA vừa xét, tức là sản phẩm có dạng $h(S_1)$, trong đó $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số sao cho $h(S_1)$ cũng là một biến ngẫu nhiên, QMKCA có thể chọn một hàm riêng cho h như $h\left(x\right) := \max\left(x - K, 0\right)$. Có rất nhiều khả năng khác nhau khi chọn hàm h để có nhiều quyền tài chính khác nhau.

Theo Định nghĩa 3, một phương án đầu tư bảo hộ cho $h(S_1)$ là một chiến lược kinh doanh (x, H) (với $H := (H_0, H_1)$) thỏa mãn điều kiện $V_1(x,\ H) = h(S_1)$, điều kiện này thì tương đương với

$$H_0(1+r) + H_1S_1(\omega_1) = h(S_1(\omega_1)) \qquad (10)$$
$$H_0(1+r) + H_1S_1(\omega_2) = h(S_1(\omega_2)) \qquad (11)$$

Hay

$$H_0 + cH_1S_1(\omega_1) = ch(S_1(\omega_1)) \qquad (12)$$
$$H_0 + cH_1S_1(\omega_2) = ch(S_1(\omega_2)) \qquad (13)$$

trong đó $c := \dfrac{1}{r+1}$ là thừa số khấu hao.

Mệnh đề 2.

Trong mô hình tài chính một chu kì, hai trạng thái và không chênh lệch giá; giả sử h(S_1) là một quyền tài chính và (x, H) là phương án đầu tư bảo hộ cho h(S_1), thì x là giá của quyền tài chính h(S_1) tại thời điểm t = 0.

Chứng minh. Từ (12) và (13) ta có

$$H_1 = \frac{h(S_1(\omega_1)) - h(S_1(\omega_2))}{S_1(\omega_1) - S_1(\omega_2)} \qquad (14)$$

Ta định nghĩa

$$\tilde{p} := \frac{1+r-d}{u-d} \qquad (15)$$

Vì $d < 1+r < u$ suy ra rằng $0 < \tilde{p} < 1$ và ta có

$$1-\tilde{p} := \frac{u-1-r}{u-d} \qquad (16)$$

và

$$c(\tilde{p}S_1(\omega_1) + (1-\tilde{p})S_1(\omega_2)) = S_0 \qquad (17)$$

Ta nhân phương trình (12) với $\tilde{p}$, phương trình (13) với $1 - \tilde{p}$ và cộng vế đối vế, ta được

$$x + H_1\left[c\left(\tilde{p}S_1(\omega_1) + (1-\tilde{p})S_1(\omega_2)\right) - S_0\right] = c\left[\tilde{p}h(S_1(\omega_1)) + (1-\tilde{p})h(S_1(\omega_2))\right] \qquad (18)$$

Từ (17) suy ra

$$x = c[\tilde{p}h(S_1(\omega_1)) + (1-\tilde{p})h(S_1(\omega_2))] \qquad (19)$$

Vì $u - d \neq 0$, nên ta luôn luôn có thể tìm được phương án đầu tư bảo hộ cho một quyền tài chính trong mô hình một chu kì, hai trạng thái. Mô hình tài chính có tính chất này được gọi là mô hình đầy đủ (complete) và ngược lại, ta gọi là mô hình tài chính không đầy đủ. Công thức (14) thường được gọi là công thức bảo hộ Delta (Delta Hedging Formula). Trong mô hình tài chính không đầy đủ, ta không thể dùng kĩ thuật định giá phái sinh theo nguyên lí đáp ứng để bảo hộ.

Điều đáng lưu ý là giá x của quyền tài chính theo công thức trên thì không phụ thuộc vào xác suất p hay q:= 1 − p của sự xuất hiện trạng thái tài chính ω_1 hoặc ω_2. Đặc biệt, lấy $\tilde{P}$ là một độ đo xác suất khác trên $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$ với

$$\tilde{P}(\omega_1) := \tilde{p}, \qquad \tilde{P}(\omega_2) := 1 - \tilde{p}$$

Thì x chính là giá trị kì vọng lợi nhuận đã khấu hao, lấy theo độ đo xác suất mới $\tilde{P}$, nghĩa là

$$x = E_{\tilde{P}}[ch(S_1)] \tag{20}$$

Độ đo xác suất $\tilde{P}$ là độ đo xác suất rủi ro trung tính, vì dưới độ đo này, giá quyền tài chính chỉ phụ thuộc vào kì vọng của lợi nhuận mà không chi phối bởi rủi ro nào.

Bổ đề 3.

Giả sử mô hình tài chính một chu kì tổng quát là lành mạnh (hay không có chênh lệch giá); thì thị trường này là đầy đủ khi và chỉ khi số trạng thái của thị trường trong Ω bằng với số véc tơ độc lập tuyến tính trong $\{S_1^0, S_1^1, \ldots, S_1^N\}$, nghĩa là ma trận k hàng, (N + 1) cột A cho bởi

$$A = \begin{bmatrix} S_1^0 & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^N(\omega_1) \\ S_1^0 & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^0 & S_1^1(\omega_k) & \dots & S_1^N(\omega_k) \end{bmatrix}$$

phải có hạng là k.

Chứng minh.

Theo kết quả từ đại số tuyến tính, ma trận A có hạng là k khi và chỉ khi, với mỗi $X \in \mathbb{R}^k$, phương trình AH = X có một nghiệm duy nhất $H \in \mathbb{R}^{N+1}$. Mặt khác ta có

$$\begin{bmatrix} S_1^0 & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^N(\omega_1) \\ S_1^0 & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^N(\omega_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1^0 & S_1^1(\omega_k) & \dots & S_1^N(\omega_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1(x,H)(\omega_1) \\ V_1(x,H)(\omega_2) \\ \vdots \\ V_1(x,H)(\omega_k) \end{bmatrix}$$

Điều này chứng tỏ rằng tìm một phương án đầu tư bảo hộ cho quyền tài chính X là tương đương với việc giải hệ phương trình AH = X. □

Bổ đề 4. (Farkas Lemma)

Cho ma trận A, m hàng, n cột và một véc tơ cột m chiều b, thì hoặc là

$$AX = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{21}$$

có một nghiệm, hoặc

$$b^T y < 0, \quad A^T y \geq 0, \quad y \in \mathbb{R}^m \tag{22}$$

có một nghiệm, nhưng không thể cả hai cùng lúc xảy ra.

Chứng minh. (có thể xem [4]).

Ghi chú 3.

Từ Bổ đề Farkas, ta có thể kiểm chứng dễ dàng rằng nếu hệ (21) vô nghiệm, thì tồn tại $y \in \mathbb{R}^m$ sao cho

$$b^T y > 0, \quad \text{and} \quad A^T y = 0 \tag{23}$$

Bổ đề 5.

Giả sử rằng mô hình tài chính một chu kì tổng quát là lành mạnh, thì quyền tài chính X là mua bán được nếu và chỉ nếu $E_{\mathbb{Q}}\left[cX\right]$ *lấy cùng một giá trị với mọi* $\mathbb{Q} \in P_N$

Chứng minh. Giả sử quyền tài chính X là buôn bán được, thì theo Định lí 2 và Ghi chú 2

$$E_{\mathbb{Q}}[cX] = V_0 \ \text{(constant)}$$

đối với mọi độ đo xác suất rủi ro trung tính $\mathbb{Q}$. Ngược lại, giả sử rằng X không buôn bán được, ta sẽ chứng minh rằng có hai độ đo xác suất rủi ro trung tính $\mathbb{Q}_1$ và $\mathbb{Q}_2$ trên Ω sao cho

$$E_{\mathbb{Q}_1}[cX] \neq E_{\mathbb{Q}_2}[cX]$$

Nếu X không buôn bán được thì hệ (21) không có nghiệm, theo Bổ đề 4, Ghi chú 3, có một véc tơ $\prod = (\prod_1, ..., \prod_k)$ thỏa $\prod A = 0$ và $\prod X > 0$. Cho trước một độ đo xác suất rủi ro trung tính $\mathbb{Q}_1$ trên Ω. Bây giờ ta xem $\mathbb{Q}_2$ được định nghĩa bởi

$$\mathbb{Q}_2(\omega_i) := \mathbb{Q}_1(\omega_i) + \lambda \prod_i S_1^0$$

với $\lambda > 0$ sao cho $\mathbb{Q}_2(\omega_i) > 0$ với mọi $\omega_i \in \Omega$. Vì tính chất $\Pi A = 0$, dẫn đến

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbb{Q}_2(\omega_i) := \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Q}_1(\omega_i) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \prod_i S_1^0 = 1$$

Do đó $\mathbb{Q}_2$ cũng là độ đo xác suất rủi ro trung tính trên Ω. Mặt khác,

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}_2}[cX] &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{Q}_2(\omega_i)[cX(\omega_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{k} c\mathbb{Q}_1(\omega_i) X(\omega_i) + \lambda \sum_{i=1}^{k} \prod_i X(\omega_i) \\ &= E_{\mathbb{Q}_1}[cX] + \lambda \prod X \end{aligned}$$

Từ $\lambda \Pi X > 0$ suy ra rằng

$$E_{\mathbb{Q}_1}[cX] \neq E_{\mathbb{Q}_2}[cX]$$ □

Định lí 3.

Giả sử mô hình thị trường tài chính một chu kì tổng quát không chênh lệch giá, thì thị trường là đầy đủ nếu và chỉ nếu có đúng một độ đo xác suất rủi ro trung tính, nghĩa là $|\mathrm{P}_{\mathrm{N}}| = 1$.

Chứng minh. (⇒): Giả sử thị trường không chênh lệch giá và đầy đủ, theo nguyên lí định giá tài sản, tồn tại một độ đo xác suất rủi ro trung tính. Giả sử rằng P_{N} chứa hai độ đo xác suất rủi ro trung tính $\square_1$ và $\square_2$. Ta sẽ chứng minh rằng $\square_1 = \square_2$.

Với mỗi i = 1, 2,… , k, lấy quyền tài chính X định nghĩa bởi

$$\mathrm{X}^{\mathrm{i}}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{S}_1^0, & \omega = \omega_{\mathrm{i}} \\ 0, & \omega \neq \omega_{\mathrm{i}} \end{cases}$$

Thì X^{i} là quyền tài chính với mỗi $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{k}$. Hơn nữa

$$\square_1(\omega_{\mathrm{i}}) = \mathrm{E}_{\square_1}[\frac{1}{\mathrm{S}_1^0}\mathrm{X}^{\mathrm{i}}] = \mathrm{E}_{\square_2}[\frac{1}{\mathrm{S}_1^0}\mathrm{X}^{\mathrm{i}}] = \square_2(\omega_{\mathrm{i}}).$$

Do đó, $\square_1 = \square_2$.

(⇐): Giả sử rằng thị trường là không chênh lệch giá và có đúng một độ đo xác suất rủi ro trung tính. Ta sẽ chứng tỏ rằng thị trường là đầy đủ, nghĩa là lấy X là một quyền tài chính bất kì, ta chứng minh X là mua bán được. Điều này đúng. Thật vậy, với giả thiết thị trường có đúng một độ đo xác suất rủi ro trung tính $\square$, thì $\mathrm{E}_{\square}\left[\mathrm{cX}\right]$ có một giá trị duy nhất. Từ Bổ đề 5, suy ra rằng X là mua bán được. Định lí được chứng minh. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Hữu và Vương Quân Hoàng (2007), *Các phương pháp toán học trong tài chính*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Nguyễn Chí Long (2008), "Xác suất thống kê và quá trình ngẫu nhiên", Nxb Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh, Tái bản lần I.
3. Nguyễn Chí Long (2010), "Nguyên lí căn bản định giá tài sản trong thị trường tài chính", *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TPHCM*, 21(55), tr. 38-51.
4. Nguyễn Chí Long (2011), "Bổ đề Farkas và áp dụng trong thị trường tài chính", *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TPHCM*, 27(61), tr. 41-53.
5. Nguyễn Chí Long (2011), "Định giá tài sản trong mô hình nhị thức", Số chuyên đề của Trường Đại học Sài Gòn: *Hội thảo Khoa học Quốc tế Giải tích và Toán Ứng dụng*, tr. 513-525.
6. Nguyễn Chí Long (2011), "Mô hình định giá tài sản tư bản", *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TPHCM*, 30(64) tr. 25-41.

7. B. Guerrien - Nguyễn Đôn Phước (dịch) (2007), *Từ điển phân tích Kinh tế*, Nxb Tri thức.
8. Trần Hùng Thao (2004), *Nhập môn toán học tài chính*, Nxb Khoa học kĩ thuật, Hà Nội.
9. Trần Hùng Thao (2009), "Toán học Tài chính, một ngành khoa học đang phát triển mạnh", *Thông tin Toán học - Hội Toán học Việt Nam*, tập 13, số 2, tr. 13-16.
10. Elliott R. J. and Kopp P. E. (2005), *Mathematics of Financial Markets*, Springe Finance, Second Edition.
11. Foellmer H. and Schied A. (2002), *An Introduction in Discrete Time*, Walter de Gruyter.
12. Pennacchi G.(2008), *Theory of Asset Pricing*, Pearson Education, Inc.
13. Pliska (1997), *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishing.
14. Shreve S. E. (2005), *Stochastic Calculus for Finance*, Volume 1: The Binomial Asset Pricing Model. Springer.
15. Oliver Ewald C., Discrete Time Finance, at *http://ssrn.com/abstract=976589*

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 03-8-2015; ngày phản biện đánh giá: 31-8-2015;
ngày chấp nhận đăng: 24-9-2015)