MỘT DẠNG ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG KRASNOSELSKII TRONG KHÔNG GIAN K-ĐỊNH CHUẨN

NGUYỄN BÍCH HUY*, VÕ VIẾT TRÍ**

TÓM TẮT

Trong báo cáo này, chúng tôi có một kết quả mở rộng định lí Krasnoselskii về điểm bất động của tổng hai toán tử trên không gian K-định chuẩn. Chúng tôi sẽ trình bày một ứng dụng cho phương trình vi-tích phân.

Từ khóa: điểm bất động Krasnoselskii, không gian K-Định chuẩn.

ABSTRACT

An extension of the Krasnoselskii fixed point Theorem in K-normed space

In this report, we obtain an extension of the Krasnoselskii fixed point theorem for sum of two operators to the case of K-normed spaces. We apply it to the existence of solutions of the integro-differential equation.

Keywords: Krasnoselskii fixed point, K-normed spaces.

1. Giới thiệu

Lí thuyết về điểm bất động là một công cụ mạnh và hữu hiệu để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và cấu trúc tập nghiệm của phương trình phi tuyến tổng quát. Một trong những kết quả được các nhà Toán học quan tâm là Định lí điểm bất động của Krasnoselskii về sự tồn tại điểm bất động của tổng hai toán tử trên không gian Banach, và Định lí này đã được phát triển trên những không gian lồi địa phương ([4],[5]), ở các dạng khác nhau theo những ràng buộc của những toán tử. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một kết quả tương tự về sự tồn tại điểm bất động của tổng hai toán tử trên không gian K-định chuẩn với điều kiện bị chặn bởi dãy ánh xạ tuyến tính và sử dụng kết quả đó để nghiên cứu một số phương trình vi-tích phân phi tuyến được nêu trong [4] với các ràng buộc khác. Chúng tôi giải quyết bài toán bằng cách xây dựng không gian K-định chuẩn với tôpô thích hợp.

Cho (E,K,γ) là không gian tuyến tính tôpô đầy đủ với tôpô γ và thứ tự sinh bởi nón *K*, một tập con *M* của *E* gọi là chuẩn tắc nếu như với $\xi \in K, \eta \in M$ thỏa $\xi \le \eta$ thì $\xi \in M$. Tập con *M* của *E* gọi là bị chặn (giới nội) nếu mỗi lân cận V của gốc cho trước tồn tại số $a>0$ để $A \subset aV$. Dưới đây, ta luôn giả sử (E,K,γ) là không gian lồi địa phương, chuẩn tắc, với cơ sở lân cận của gốc là họ σ gồm các tập lồi, cân đối, hấp thu chuẩn tắc chứa ít nhất một lân cận bị chặn. Thêm nữa, ta giả sử *K* là nón chính quy.

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

** NCS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

Định nghĩa 1.1 [6]

Cho X là không gian tuyến tính thực. Một ánh xạ $p : X \to E$ được gọi là K-chuẩn trên X nếu

(i) $p(x) \geq \theta_E \quad \forall x \in X$ và $p(x) = \theta_E$ nếu và chỉ nếu $x = \theta_X$, ở đây θ_E, θ_X lần lượt là phần tử không của E và X,

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \quad \forall \lambda \in \mathrm{R}, \ \forall x \in X$,

(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$.

Nếu p là K-chuẩn trên X thì cặp (X,p) sẽ gọi là không gian K-chuẩn. Trên không gian này chúng tôi xem xét tôpô τ nhận họ $\eta_x = \{x + p^{-1}(W) : W \in \sigma\}$, làm cơ sở lân cận địa phương tại x, không gian tôpô này được ký hiệu (X, p, τ).

Định nghĩa 1.2 [6]

1) Ta nói rằng (X, p, τ) là đầy đủ theo Weierstrass nếu dãy bất kì $\{x_n\} \subset X$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} p(x_{n+1} - x_n)$ hội tụ trong E thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ trong (X, p, τ).

2) Ta nói rằng (X, p, τ) là đầy đủ theo Kantorovich nếu một dãy bất kì $\{x_n\}$ thỏa

$$p(x_k - x_l) \leq a_n \quad \forall k, l \geq n, \ \{a_n\} \subset K, \ a_n \overset{\gamma}{\to} \theta_E \tag{1}$$

thì $\{x_n\}$ hội tụ trong (X, p, τ).

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được rằng dãy đầy đủ theo Kantorovich thì nó đầy đủ theo Weierstrass.

2. Định lí điểm bất động

Định lí 2.1.

Cho (X, p, τ) là đầy đủ theo Weierstrass (hoặc Kantorovich), C là tập đóng trong X và ánh xạ $T : C \to X$. Giả sử với mỗi $z \in C$ các điều kiện sau được thỏa:

(1) $T_z(x) = T(x) + z \in C \quad \forall x \in C$.

(2) Tồn tại dãy các ánh xạ tuyến tính, dương, liên tục $\{Q_n : E \to E\}_{n \in \mathrm{N}^*}$ thỏa các tính chất:

(2a) $\xi \in K$ thì $\lim_{n\to\infty} Q_n(\xi) = \theta_E$ ($Q_n(\xi) \overset{\gamma}{\to} \theta_E$),

(2b) $V \in \sigma$ thì tồn tại $W \in \sigma$ và $r \in \mathrm{N}$ để cho $Q_r(W+V) \subset V$,

(2c) $p\left(T_z^n(x) - T_z^n(y)\right) \leq Q_n \circ p(x-y)$ với mọi $n \in \mathrm{N}$ và $x, y \in C$.

Khi đó: ánh xạ $\left(I-T\right)^{-1}: C \to C$ *là xác định và liên tục.*

Chứng minh. Bước 1: Chứng minh sự tồn tại của ánh xạ $\left(I-T\right)^{-1}$.

Với $z \in C$, cố định, Với $V' \in \sigma$ cho trước, chọn $V \in \sigma$ thỏa $V+V \subset V'$, theo giả thiết *(2b)* ta chọn $W \in \sigma$ và số $r \in \mathrm{N}$ để cho $W \subset V$ và $Q_r\left(W+V\right) \subset V$. (2)

Với $z_0 \in C$ bất kì, ta đặt $z_n = T_z^r\left(z_{n-1}\right),\ n=1,2,...$, và bằng quy nạp theo n ta có

$$z_n = T_z^{nr}\left(z_0\right),\ z_{n+1} = T_z^{nr}\left(z_1\right).$$

Do đó

$$p\left(z_n - z_{n+1}\right) = p\left(T_z^{nr}\left(z_0\right) - T_z^{nr}\left(z_1\right)\right) \le Q_{nr} \circ p\left(z_0 - z_1\right) \text{ với mọi } n \in \mathrm{N}.$$

Mặt khác, theo giả thiết *(2a)* thì tồn tại $N \in \mathrm{N}$ để

$$Q_{nr} \circ p\left(z_0 - z_1\right) \in W,\ \forall\ n \ge N. \tag{3}$$

Đặt $x_0 = T_z^{Nr}\left(z_0\right), x_n = T_z^r\left(x_{n-1}\right),\ n=1,2,...$ (dãy $\left\{x_n\right\}$ là tịnh tiến của dãy $\left\{z_n\right\}$). Theo (3) cùng với tính chuẩn tắc của tập W và bất đẳng thức

$$p\left(T_z^{Nr}\left(z_0\right) - T_z^{Nr}\left(z_1\right)\right) \le Q_{Nr} \circ p\left(z_0 - z_1\right)$$

thì ta có

$$\xi_0 = p\left(x_0 - x_1\right) = p\left(T_z^{Nr}\left(z_0\right) - T_z^{Nr}\left(z_1\right)\right) \in W. \tag{4}$$

Bằng quy nạp theo $n = 0,1,2,...$ ta chứng tỏ được tổng riêng

$$S_n\left(Q_r\right)\left(\xi_0\right) = \sum_{k=0}^{n} Q_r^k\left(\xi_0\right) \in W+V. \tag{5}$$

Thật vậy, hiển nhiên theo (4) thì (5) đúng với $n=0$, giả sử (5) đúng với $n=k$, khi đó

$$S_k\left(Q_r\right)\left(x_0\right) \in W+V,$$

theo (2) suy ra $Q_r\left(S_k\left(Q_r\right)\left(\xi_0\right)\right) \in V$ và do đó

$$S_{k+1}\left(Q_r\right)\left(\xi_0\right) = \xi_0 + Q_r\left(S_k\left(Q_r\right)\left(\xi_0\right)\right) \in W+V,$$

nghĩa là (5) đúng với $n = k+1$.

Với $n \in \mathrm{N}^*$, ta có $p\left(x_n - x_{n+1}\right) = p\left(T_z^r\left(x_{n-1}\right) - T_z^r\left(x_n\right)\right) \le Q_r \circ p\left(x_{n-1} - x_n\right) \le Q_r^n\left(\xi_0\right)$,

suy ra

$$\sum_{k=0}^{n} p\left(x_k - x_{k+1}\right) \le \sum_{k=0}^{n} Q_r^k\left(\xi_0\right) \in W+V \subset V+V \subset V'. \tag{6}$$

Vì V' là lân cận bị chặn của gốc cho trước trong (E,K,γ), từ tính chính quy của nón K thì $\sum_{k=0}^{\infty} Q_r^k(\xi_0) < \infty$. Theo tính chất đầy đủ theo Weierstrass của (X,p,τ) thì tồn tại $x_* \in C$ để $x_n \xrightarrow{\tau} x_*$. Mặt khác, ta có

$$p\left(x_* - T_z^r(x_*)\right) \le p\left(x_* - x_{n+1}\right) + Q_r \circ p\left(x_n - x_*\right) \xrightarrow{\gamma} \theta_E,$$

suy ra x_* là điểm bất động của T_z^r. Giả sử $a \in C$, $T_z^r(a) = a$, khi đó

$$p\left(x_* - a\right) = p\left(T_z^{rn}(x_*) - T_z^{rn}(a)\right) \le Q_{rn} \circ p\left(x_* - a\right) \xrightarrow{\gamma} \theta_E \text{ (khi } n \to \infty)$$

suy ra $a = a_*$. Như vậy T_z^r có điểm bất động duy nhất, từ đẳng thức $T_z^r(x_*) = x_*$, suy ra $T_z(x_*)$ cũng là điểm bất động của T_z^r và do tính duy nhất vừa chứng minh trên thì x_* là điểm bất động duy nhất của T_z. Như vậy ánh xạ $\phi : C \to C$, $z \to \phi(z)$ với $\phi(z)$ là điểm bất động của T_z và như vậy $\phi = (I-T)^{-1}$ là xác định. Hơn nữa, theo trong chứng minh trên thì $T_z^n(z_0) \xrightarrow{\tau} \phi(z)$, với $z_0 \in C$ bất kì.

Bước 2. Chứng minh $\phi = (I-T)^{-1}$ là liên tục. Với $y \in C$, cố định, đặt $x = \phi(y)$, khi đó $x = T_y^n(x)$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Sử dụng giả thiết của định lí (với $z = y$), khi đó tồn tại dãy ánh xạ tuyến tính, dương, liên tục $\{Q_n : E \to E\}_n$ có các tính chất nêu ở *(2a, 2b,2c)* của định lí.

Giả sử $V' \in \sigma$ ta sẽ chứng tỏ tồn tại tập $V_0 \in \sigma$ để nếu $y' \in C$ thỏa $p(y-y') \in V_0$ thì $p(x-x') \in V'$, ở đây $x' = \phi(y')$. Thật vậy, theo tính chất của họ lân cận của gốc trong không gian (E,K,γ) ta chọn được $V \in \sigma$ thỏa $V + V \subset V'$, sử dụng giả thiết *(2b)* ta tìm được $W \in \sigma$ và số $r \in \mathbb{N}^*$ để có $W + W \subset V$ và $Q_r(W+V) \subset V$. (7)

Tập V_0 được xây dựng như sau: Đặt $W_0 = W$ chọn $W_0' \in \sigma$ thỏa $W_0' + W_0' \subset W_0$, sử dụng tính liên tục của Q_1 tại gốc với lân cận W_0' ta tìm được $W_1 \in \sigma$ để cho $W_1 \subset W_0'$ và $Q_1(W_1) \subset W_0'$. Do tính chuẩn tắc của W_0' và

$$p\left(T(a) - T(b)\right) = p\left(T_y(a) - T_y(b)\right) \le Q_1 \circ p(a-b),\ a,b \in C$$

thì ta có mệnh đề sau đúng $p(a-b) \in W_1 \Rightarrow p\left(T(a)-T(b)\right) \in W_0'$ $\quad (a,b \in C)$

Chọn $W_1' \in \sigma$ sao cho $W_1' + W_1' \subset W_1$, lại tiếp tục sử dụng tính liên tục của Q_1 tại θ_E ta tìm được $W_2 \in \sigma$ để có $W_2 \subset W_1'$ và mệnh đề sau đúng

$$p(a-b)\in W_2 \Rightarrow p(T(a)-T(b))\in W_1' \quad (a,b\in C).$$

Tiếp tục quá trình trên ta tìm được các dãy lân cận của gốc $\{W_i\}_{i=0,1,...,r-1}$ và $\{W_i'\}_{i=0,1,...,r-1}$ có các tính chất $W_j \subset W_{j-1}'$, và $W_j'+W_j' \subset W_j$ và mệnh đề sau đúng

$$p(a-b)\in W_j \Rightarrow p(T(a)-T(b))\in W_{j-1}' \quad (a,b\in C), \tag{8}$$

với mọi $j=1,2,...,r-1$. Đặt $V_0 = W_{r-1}$, trước hết ta sẽ chứng minh các kết quả sau:

(i) Với $y'\in C$ thỏa $p(y-y')\in V_0$ thì $p\left(T_y^r(z)-T_{y'}^r(z)\right)\in W_0 \ \forall z\in C.$ (9)

(ii) $p\left(T_y^{rn}(a)-T_{y'}^{rn}(a)\right)\in W+V,\ \forall a\in C$ và $\forall n\in N^*$ (10)

Chứng minh (i). Ta có $T_y^2(z)-T_{y'}^2(z)=T(T_y(z))-T(T_{y'}(z))+y-y'$, suy ra

$$p\left(T_y^2(z)-T_{y'}^2(z)\right)\le p(T(a)-T(b))+p(y-y'), \tag{11}$$

với $a=T_y(z)$, $b=T_{y'}(z)$. Sử dụng (8), chú ý $p(a-b)=p(y-y')\in W_{r-1}\subset W_{r-2}'$ thì ta có $p(T(a)-T(b))+p(y-y')\in W_{r-2}'+W_{r-2}'\subset W_{r-2}$. Từ (11) và tính chuẩn tắc của tập W_{r-2} suy ra

$$p\left(T_y^2(z)-T_{y'}^2(z)\right)\in W_{r-2}, \quad \forall z\in C. \tag{12}$$

Lập luận tương tự có $p\left(T_y^3(z)-T_{y'}^3(z)\right)\in W_{r-3},....,\ p\left(T_y^r(z)-T_{y'}^r(z)\right)\in W_0, \forall z\in C.$

Chứng minh (ii). Ta sẽ quy nạp theo *n*. Hiển nhiên theo phát biểu (i) với chú ý $W_0\subset W$ thì mệnh đề (10) đúng cho $n=1$. Giả sử mệnh đề (10) đúng cho $n=k$, khi đó

$$p\left(T_y^{r(k+1)}(a)-T_{y'}^{r(k+1)}(a)\right)=p\left(T_y^r\left(T_y^{rk}(a)-T_{y'}^r\left(T_{y'}^{rk}(a)\right)\right)\right.$$

$$\le p\left(T_y^r\left(T_y^{rk}(a)\right)-T_y^r\left(T_{y'}^{rk}(a)\right)\right)+p\left(T_y^r\left(T_{y'}^{rk}(a)\right)-T_{y'}^r\left(T_{y'}^{rk}(a)\right)\right).$$

suy ra

$$p\left(T_y^{r(k+1)}(a)-T_{y'}^{r(k+1)}(a)\right)\le Q_r\circ p\left(T_y^{rk}(a)-T_{y'}^{rk}(a)\right)+p\left(T_y^r(z))-T_{y'}^r(z)\right) \tag{13}$$

(ở đây $z=T_{y'}^{rk}(a)$), sử dụng giả thiết quy nạp $p\left(T_y^{rk}(a)-T_{y'}^{rk}(a)\right)\in W+V$, quan hệ bao hàm (7) và kết quả phát biểu (9) thì ta có

$$Q_r\circ p\left(T_y^{rk}(a)-T_{y'}^{rk}(a)\right)+p\left(T_y^r(z))-T_{y'}^r(z)\right)\in V+W_0,$$

từ (13) cùng với tính chuẩn tắc của tập $V+W$ và chú ý $W_0\subset W$ thì ta có mệnh đề (10) đúng với $n=k+1$. Bây giờ ta chứng tỏ rằng

$$y'\in C\ ,\ p(y-y')\in V_0, x=\varphi(y),\ x'=\varphi(y') \text{ thì } p(x-x')\in V'.$$

Thật vậy,

$$p(x-x') \le p\left(T_y^{nr}(x)-T_{y'}^{nr}(x)\right)+p\left(T_{y'}^{nr}(x)-x'\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Theo giả thiết (2a) cùng với tính chất $T_{y'}^{nr}(x)\xrightarrow{\tau}\varphi(y')=x'$ (khi $n\to\infty$) nên tồn tại $n_{y'}\in\mathbb{N}$ để cho $p\left(T_{y'}^{n_{y'}r}(x)-x'\right)\in W$ và khi đó, cùng với việc sử dụng kết quả (10) ta có

$$p(x-x') \le p\left(T_y^{n_{y'}r}(x)-T_{y'}^{n_{y'}r}(x)\right)+p\left(T_{y'}^{n_{y'}r}(x)-x'\right).$$

Do đó sử dụng phát biểu (ii) đã chứng minh, ta có

$$p(x-x')\in W+V+W\subset V+V\subset V'.$$

Định lí 2.2.

Cho (X,p,τ) là đầy đủ theo Weierstrass (hoặc Kantorovich), C là tập lồi, đóng trong X, các ánh xạ T, S : $C\to X$. Giả sử với mỗi $z\in C$ các điều kiện sau đây được thỏa:

(1) $T_z(x)=T(x)+z\in C \quad \forall x\in C.$

(2) Tồn tại dãy các ánh xạ tuyến tính, dương, liên tục $\{Q_n : E\to E\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ thỏa các tính chất:

(2a) $\xi\in K$ *thì* $\lim_{n\to\infty}Q_n(\xi)=\theta_E$ $\left(Q_n(\xi)\xrightarrow{\gamma}\theta_E\right)$,

(2b) $V\in\sigma$ *thì tồn tại* $W\in\sigma$ *và* $r\in\mathbb{N}$ *để cho* $Q_r(W+V)\subset V$,

(2c) $p\left(T_z^n(x)-T_z^n(y)\right)\le Q_n\circ p(x-y)$ *với mọi* $n\in\mathbb{N}$ *và* $x,y\in C$,

(3) S liên tục, $S(C)\subset C$ *và* $S(C)$ *là compact tương đối.*

Khi đó: Toán tử T+S có điểm bất động trong C

Chứng minh. Theo kết quả định lí 2.1 thì ánh xạ $(I-T)^{-1} : C\to C$ là xác định và liên tục, áp dụng định lí Tychonoff cho ánh xạ $(I-T)^{-1}\circ S$ với chú ý tập $\overline{(I-T)^{-1}\circ S(C)}$ chứa trong tập compact $(I-T)^{-1}\circ\overline{S(C)}$ thì ánh xạ $(I-T)^{-1}\circ S$ có điểm bất động, và nó cũng là điểm bất động của ánh xạ *T+S*.

3. Ứng dụng cho phương trình tích phân trong không gian Banach.

3.1. *Bài toán* [2]

Cho *F* là không gian Banach với chuẩn $\|.\|$, xét sự tồn tại nghiệm phương trình tích phân:

$$x(t) = \int_0^t f(s, x(s))ds + \int_0^t g(t, s, x(s))ds + \varphi(t), t \geq 0 \tag{14}$$

Trong đó $\varphi : [0,\infty) \to F$ là hàm liên tục, *f* và *g* là các hàm nhận giá trị trong *F* và thỏa các điều kiện sau:

(i) $f : [0,\infty) \times F \to F$ liên tục và tồn tại số $k \geq 0$ để: $\|f(s,x) - f(s,y)\| \leq k\|x - y\|$, " x, y Î F

(ii) $g : [0,\infty) \times [0,\infty) \times F \to F$ là ánh xạ và thu hẹp của g trên $I \times J \times F$ là ánh xạ compact, với I, J là các đoạn bị chặn bất kì trong $[0,\infty)$.

3.2. Một số kết quả chuẩn bị

$E = \{(x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...) : x^{(j)} \in \mathrm{R}, \forall j \in \mathrm{N}^*\}$, với các phép toán cộng, nhân thông thường là không gian tuyến tính, trên *E* ta xét tôpô γ lồi địa phương xác định bởi họ các phép chiếu

$$\Gamma = \{h_i : E \to \mathrm{R}, h_i(x) = x^{(i)}\}_{i=1,2,...},$$

thứ tự sinh bởi nón *K* là tập các dãy số thực không âm. $X = C([0,\infty), F)$ chỉ tập các ánh xạ liên tục từ $[0,\infty)$ vào *F*, là không gian tuyến tính với các phép toán cộng, nhân quen thuộc, ta sử dụng không gian K-định chuẩn (X, p, τ), $p : X \to E$, định bởi

$$p(x) = (\{\sup\|x(t)\| : t \in [0,n]\})_{n \in \mathrm{N}^*}.$$

Ta sử dụng một số ký hiệu sau: với mỗi $a \in \mathrm{N}^*$, đặt $X_a = C([0,a], F)$, (X_a, q_a) là không gian Banach với chuẩn

$$q_a(x) = \{\sup\|x(t)\| : t \in [0,a]\}.$$

Với các định nghĩa trên, ta dễ dàng kiểm tra kết quả sau:

Mệnh đề 3.1.

Mỗi $a \in \mathrm{N}^*$, $x \in X$, *đặt* $p_a(x) = \{\sup\|x(t)\| : t \in [0,a]\}$, *khi đó lưới* $\{x_n\}$ *hội tụ về x trong* (X, p, τ) *khi và chỉ khi* $(\forall a \in \mathrm{N}^*, \lim_{n\to\infty} p_a(x_n - x) = 0)$. Do đó tôpô τ trùng với tôpô sinh bởi họ nửa chuẩn $\{p_a : a \in \mathrm{N}^*\}$ nên khả mêtric.

Mệnh đề 3.2.

(X, p, τ) *như đã định nghĩa trên là đầy đủ theo Kantorovich.*

Chứng minh. Giả sử $\{x_n\}_n$ là dãy trong *X*, và tồn tại dãy $\{a_n\}_n \subset K$, $a_n \xrightarrow{\gamma} \theta_E$ thỏa

$p(x_l - x_k) \le a_n$ với các số nguyên dương l, k, n thỏa $l > k \ge n$. Ta chứng tỏ $\{x_n\}$ hội tụ trong (X, p, τ). Với mỗi $a \in \mathrm{N}^*$,

$$q_a\left(x_l\,|_{[0,a]} - x_l\,|_{[0,a]}\right) = p_a(x_l - x_k) \le h_a(a_n) \to 0,$$

X_a là không gian Banach nên $\left\{x_n\,|_{[0,a]}\right\}$ hội tụ về y_a trong (X_a, q_a). Với $a, a' \in \mathrm{N}^*, a < a'$, và với $t \in [0, a]$ ta có

$$\|y_a(t) - y_{a'}(t)\| \le \|y_a(t) - x_n(t)\| + \|x_n(t) - y_{a'}(t)\|$$

$$\le q_a\left(y_a - x_n\,|_{[0,a]}\right) + q_{a'}\left(x_n\,|_{[0,a]} - y_{a'}\,|_{[0,a]}\right) \to 0 \text{ khi } n \to \infty.$$

Suy ra $y_a(t) = y_{a'}(t) \quad \forall (a,a') \in \mathrm{N}^2,\ a' > a \ge t \ge 0$.

Bây giờ, ta xác định hàm $x : [0, \infty) \to F$, định bởi $x(t) = y_m(t)$ với $m \ge t$.

Với $t_0 \in [0, \infty)$ bằng cách chọn $a > t_0$ và xét không gian (X_a, q_a) thì ta có x liên tục tại t_0, như vậy $x \in X$. Ta sử dụng mệnh đề 3.1 để chứng tỏ $x_n \xrightarrow{\tau} x$. Thật vậy, với $a \in \mathrm{N}^*$, ta có $p_a(x_n - x) = q_a\left(x_n\,|_{[0,a]} - x\,|_{[0,a]}\right) = q_a\left(x_n\,|_{[0,a]} - y_a\right) \to 0.$

Mệnh đề 3.3.

Cho $C : X \to X$, *là một toán tử trên X, Với mỗi* $a \in \mathrm{N}^*$ *ta định nghĩa ánh xạ* $\varphi_a : (X, p, \tau) \to (X_a, q_a)$, *với* $\varphi_a(x) = C(x)|_{[0,a]}$ *(là thu hẹp của C(x) trên đoạn* $[0, a]$*). Khi đó nếu với mỗi* $a \in \mathrm{N}^*$, φ_a *là ánh xạ compact thì C là ánh xạ compact.*

Chứng minh.

Ta dễ dàng nhận thấy C liên tục, ta sẽ chứng minh tập $C(X)$ là compact tương đối trong (X, p, τ). Do τ khả mêtric nên chỉ cần chứng tỏ nếu $\{x_n\}_n$ là dãy trong X, thì dãy $\{C(x_n)\}_n$ chứa dãy con hội tụ. Giả sử $\{C(x_n)\}_n$ là vô hạn phần tử, ta sẽ chỉ ra $x_* \in X$ sao cho mọi lân cận của x_* đều chứa vô số phần tử của dãy $\{C(x_n)\}_n$. Thật vậy, bằng cách quy nạp theo $a = 1, 2, ...$ ta sẽ chỉ ra dãy con $\left\{C\left(x(a)_n\right)\right\}_n$ của dãy $\{C(x_n)\}_n$ có các tính chất sau:

(i) $C\left(x(a)_n\right)|_{[0,a]} \to y_a$ trong X_a

(ii) $\left\{C\left(x(a)_n\right)\right\}_n \supset \left\{C\left(x(a+1)_n\right)\right\}_n$ với mọi $a = 1, 2, ...$

(iii) $y(a)|_{[0,a']} = y_{a'}$ với mọi $a' \in \mathrm{N}$ thỏa $a' \le a$.

Với $a=1$, theo giả thiết $\varphi_1(X)$ là tập compact tương đối nên dãy $\{\varphi_1(x_n)\}_n$ có chứa dãy con $\{\varphi_1(x(1)_n)\}_n$ hội tụ về y_1 trong X_1. Chọn dãy $\{C(x(1)_n)\}_n$ có tính chất (i). Giả sử đã chỉ ra được dãy con $\{C(x(a)_n)\}_n$ của dãy $\{C(x_n)\}_n$ có các tính chất (i), (ii), (iii) đã nêu. Do $\varphi_{a+1}(X)$ là tập compact tương đối trong X_{a+1} nên dãy $\{C(x(a)_n)|_{[0,a+1]}\}_n \equiv \{\varphi_{a+1}(x(a)_n)\}_n$ có chứa dãy con $\{\phi_{a+1}(x(a+1)_n)\}_n$ hội tụ về $y_{(a+1)}$ trong X_{a+1}, ta chọn dãy $\{C(x(a+1)_n)\}_n$ là dãy con của $\{C(x(a)_n)\}_n$ thỏa tính chất (i) và (ii), ta chứng minh tính chất (iii). Với $a' \le a+1$ ta có:

$$\{C(x(a+1)_n)|_{[0,a']}\}_n \subset \{C(x(a')_n)|_{[0,a']}\}_n,$$

$$\{C(x(a+1)_n)|_{[0,a']}\}_n \to y(a+1)|_{[0,a']} \text{ trong } X_{a'}$$

và

$$\{C(x(a')_n)|_{[0,a']}\}_n \to y_{a'} \text{ trong } X_{a'},$$

do đó $y_{(a+1)}|_{[0,a']} = y_{a'}$, kết thúc quy nạp.

Bây giờ, với mỗi $t\in[0,\infty)$ với mọi $a, a' \in \mathrm{N}$ thỏa $a \ge t$, $a' \ge t$ thì $y_a(t) = y_{a'}(t)$ do đó $\lim_{a\to\infty} y_a(t)$ là tồn tại, ta đặt $x_*(t) = \lim_{a\to\infty} y_a(t) = y_b(t)$ (với $b > t$) và có $x_* \in X$. Giả sử $x_* + W$ là lân cận của x_* trong (X, p, τ), $W = p^{-1}(V)$ với

$$V = \left\{ y \in E \ : \ \max_{1\le i\le m} \left| h_{k_i}(y) \right| < \varepsilon \right\},$$

ở đây $m \in \mathrm{N}^*, i = 1,2,...,m,$ $k_i \in \mathrm{N}^*$ và $h_{k_i} \in \Gamma$. Đặt $a = \max\{k_i \ : \ i = 1,2,...,m\}$, xét dãy con $\{C(x(a)_n)\}_n$ của dãy $\{C(x_n)\}_n$, với $t \in [0,a]$,

$$\left\| C(x(a)_n)(t) - x_*(t) \right\| = \left\| C(x(a)_n)(t) - y_a(t) \right\| \text{ và do đó}$$

$$p_a\left(C(x(a)_n) - x_*\right) = q_a\left(C(x(a)_n)|_{[0,a]} - y_a\right),$$

mặt khác, do $C(x(a)_n)|_{[0,a]} \xrightarrow{q_a} y_a$ nên tồn tại $N \in \mathrm{N}$ để cho

$$q_a\left(C(x(a)_n)|_{[0,a]} - y_a\right) < \varepsilon \ \forall n \ge N,$$

với chú ý $\left| h_{k_i} \circ p\left(C(x(a)_n) - x_*\right) \right| = p_{k_i}\left(C(x(a)_n) - x_*\right)$, khi đó

$$\left| h_{k_i} \circ p\left(C(x(a)_n) - x_*\right) \right| \le p_a\left(C(x(a)_n) - x_*\right) < \varepsilon,$$

với mọi $i=1,2,..,m$ và $n \geq N$. Suy ra $p\left(C\left(x(a)_n\right)-x_*\right) \in V$ hay $C\left(x(a)_n\right) \in x_*+W$ với mọi $n \geq N$.

3.3. Giải quyết bài toán

Với các không gian (E,K,γ) và (X,p,τ) như đã trình bày, đặt $T,S : X \to X$,

$$T(x)(t)=\int_0^t f\left(s,x(s)\right)ds,\ S(x)(t)=\int_0^t g\left(t,s,x(s)\right)ds+\varphi(t),\quad t\geq 0, x\in X,$$

Khi đó $x_* \in X$ là nghiệm của (14) khi và chỉ khi x_* là điểm bất động của toán tử $T+S$. Ta sẽ chứng tỏ với các giả thiết của bài toán, hàm *T, S* thỏa các giả thiết của định lí 2.2.

Mệnh đề 3.4.

Với $a\in \mathbb{N}^*$, *và* $z\in X$ *cho trước, với* $T_z(x)=T(x)+z$ *thì*

$$p_a\left(T_z^n(x)-T_z^n(y)\right)\leq \frac{(ka)^n}{n!}p_a(x-y),\ \forall x,y\in X, \forall n\in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Chứng minh. Trước hết, với $x,y\in X$, bằng quy nạp theo *n* ta chứng minh:

$$\left\|T_z(x)(t)-T_z(y)(t)\right\|\leq \frac{(kt)^n}{n!}p_a(x-y), t\in[0,a]. \tag{18}$$

Thật vậy, với $n=1$, $\left\|T_z(x)(t)-T_z(y)(t)\right\|\leq k\int_0^t \left\|x(s)-y(s)\right\| \leq (kt)\,p_a(x-y)$

Giả sử (18) đúng cho $n=i$,

$$\left\|T_z^{i+1}(x)(t)-T_z^{i+1}(y)(t)\right\|\leq \int_0^t \left\|f\left(s,T_z^i(x)(s)\right)-f\left(s,T_z^i(y)(s)\right)\right\|ds\leq$$

$$k\int_0^t \left\|T_z^i(x)(s)-T_z^i(y)(s)\right\|ds\leq k\int_0^t \frac{(ks)^i}{i!}p_a(x-y)\,ds\leq \frac{(kt)^{i+1}}{(i+1)!}p_a(x-y)\,ds,$$

vậy mệnh đề (18) đúng với $n=i+1$ và do đó mệnh đề được chứng minh.

Mệnh đề 3.5.

Ánh xạ $S : X\to X$, *đã định nghĩa là compact.*

Chứng minh. Theo mệnh đề (3.3) thì ta chứng minh rằng: với $a\in\mathbb{N}^*$, ánh xạ $\varphi_a : X\to X_a$, định bởi $\varphi_a(x)=S(x)|_{[0,a]}$ là compact.

1) Chứng minh φ_a liên tục.

Giả sử $\{x_n\}_n\subset X$, $x_n \xrightarrow{\tau} x$, đặt $A:=\left\{x_n(s) : n\in\mathbb{N}, s\in[0,a]\right\}$. Giả sử $\left\{x_{n_k}(s_k)\right\}$

là dãy trong *A*, $\{s_k\}_k \subset [0,a]$ chứa dãy con hội tụ, ta giả sử $s_k \to s \in [0,a]$, $\{x_{n_k}\}_k$ hội tụ về *x*, từ

$$\left\|x_{n_k}(s_k) - x(s)\right\| \le \left\|x_{n_k}(s_k) - x(s_k)\right\| + \left\|x(s_k) - x(s)\right\|$$
$$\le p_a\left(x_{n_k} - x\right) + \left\|x(s_k) - x(s)\right\| \to 0,$$

tức là $x_{n_k}(s_k) \to x(s)$ trong *F*, vậy *A* là compact tương đối trong *F* và do đó $B := [0,a]^2 \times \overline{\{x_n(s) \,:\, n \in \mathrm{N}, s \in [0,a]\}}$ là compact trong $\mathrm{R}^2 \times F$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, do *g* liên tục trên tập compact *B* nên tồn tại $\delta > 0$ sao cho có tính chất: $\forall z, z' \in F$,

$$\|z - z'\| < \delta \Rightarrow \left\|g(t,s,z) - g(t,s,z')\right\| < \frac{\varepsilon}{2a} \left(\forall (t,s) \in [0,a]^2\right). \tag{19}$$

Vì $x_n \xrightarrow{\tau} x$ nên $p_a(x_n - x) \to 0$, tồn tại số N_0 để khi $n \ge N_0$ thì $p_a(x_n - x) < \delta$, suy ra

$$\left\|x_n(s) - x(s)\right\| < \delta, \forall s \in [0,a], \forall n \ge N_0, \tag{20}$$

từ (19) và (20) có $\left\|\varphi_a(x_n)(t) - \varphi_a(x)(t)\right\| \le \int_0^t \frac{\varepsilon}{2a} ds < \frac{\varepsilon}{2}$, suy ra $q_a\left(\varphi_a(x_n) - \varphi_a(x)\right) < \varepsilon$.

2) Chứng minh $\varphi_a(X)$ là tập compact tương đối trong X_a. Theo định lí Arzela ta sẽ chứng minh có hai tính chất sau đây:

(i) $\varphi_a(X)$ là đồng liên tục,

(ii) Với mỗi $t \in [0,a]$ thì tập $\{x(t) \,:\, x \in \varphi_a(X)\}$ là tập compact tương đối trong *F*.

Đặt $B := \overline{g\left([0,a]^2 \times F\right)}$, *B* là tập compact nên tồn tại số $\beta > 0$ để cho

$$\left\|g(t,s,x(s))\right\| \le \beta, < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X, (t,s) \in [0,a] \times [0,a]$$

a) Chứng minh $\varphi_a(X)$ là đồng liên tục. Với mỗi $(t,t') \in [0,a]^2$ ta có

$$\left\|\varphi_a(x)(t) - \varphi_a(x)(t')\right\| \le \int_0^a \left\|g(t,s,x(s)) - g(t',s,x(s))\right\| ds + \int_{\min\{t,t'\}}^{\max\{t,t'\}} \left\|g(t,s,x(s))\right\| ds.$$

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, từ tính liên tục theo biến thứ nhất của *g* trên tập compact $[0,a]$ ta tìm được số $\delta_1 > 0$ để khi $|t - t'| < \delta_1$ thì ta có

$$\left\|g(t,s,x(s)) - g(t',s,x(s))\right\| < \frac{\varepsilon}{2a}, \ \forall s \in [0,a], \forall x \in X.$$

Chọn $\delta < \min\left\{\delta_1, \dfrac{\varepsilon}{2\beta}\right\}$ thì khi $|t-t'| < \delta$ ta có

$$\left\|\varphi_a(x)(t) - \varphi_a(x)(t')\right\| < \int_0^a \frac{\varepsilon}{2a} ds + |t-t'|\beta < \varepsilon.$$

b) Chứng minh $\{x(t) \,:\, x \in \varphi_a(X)\}$ là tập compact tương đối trong *F*.

Đặt $G := \overline{co}\left(g\left([0,a]^2 \times F\right) \cup \{0_F\}\right)$ là tập compact, ta có

$$\{x(t) \,:\, x \in \varphi_a(X)\} = \varphi_a(X)(t) = \left\{\int_0^t g(t,s,x(s))ds + \varphi(t)\right\} \subset aG + \varphi(t), t \in [0,a],$$

do đó $\{x(t) \,:\, x \in \varphi_a(X)\}$ là tập compact tương đối trong *F*.

Bây giờ ta chứng tỏ phương trình (14) có nghiệm bằng cách kiểm tra các điều kiện của định lí (2.2). Điều kiện (1) là hiển nhiên, điều kiện (3) được thỏa nhờ Mệnh đề 3.5. Như vậy ta còn kiểm tra điều kiện (2). Với mỗi $n \in \mathrm{N}^*$, đặt Q_n là ánh xạ tuyến tính mà ma trận của nó đối với cơ sở chính tắc dạng:

$$[Q_n] = dig\left(\frac{(k)^n}{n!}, \frac{(2k)^n}{n!}, \frac{(3k)^n}{n!}, ...\right),$$

ta kiểm tra các điều kiện (2a), (2b) và (2c)

(2a): $\xi \in K$, theo Mệnh đề (3.1) để chứng minh $Q_n(\xi) \xrightarrow{\gamma} \theta_E$ ta chứng tỏ rằng với mỗi $a \in \mathrm{N}^*$ thì $\lim_{n\to\infty} h_a(Q_n(\xi)) = 0$ ($h_a \in \Gamma$, là phép chiếu), điều này có được nhờ $\left|h_a(Q_n(\xi))\right| = \left|\dfrac{(ak)^n}{n!} h_a(\xi)\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(2b): $V \in \sigma$, giả sử $V = \left\{x \in E \,:\, \max\limits_{1\le i\le m}\left|h_{j_i}(x)\right| < \varepsilon\right\}$, ở đây $m \in \mathrm{N}^*$, $j_i \in \mathrm{N}^*$, $i = 1,2,...,m$, $\varepsilon > 0$.

Đặt $a = \max\{j_i \,:\, i = 1,2,...,m\}$, chọn $W = V$ và số $r \in \mathrm{N}$ sao cho $\dfrac{(ak)^r}{r!} < \dfrac{1}{2}$, khi đó với $\xi \in W, \xi \in V$, mọi $i = 1,2,...,m$ ta có:

$$\left|h_{j_i}(Q_r(\xi+\xi'))\right| = \left|\frac{(j_i k)^r}{r!} h_{j_i}(\xi+\xi')\right| \le \frac{(ak)^r}{r!}\left(\left|h_{j_i}(\xi)\right| + \left|h_{j_i}(\xi)\right|\right) < \varepsilon,$$

suy ra $Q_r(W+V) \subset V$.

(2c): Từ Mệnh đề (3.4) ta suy ra $p\left(T_z^n(x) - T_z^n(y)\right) \le Q_n \circ p(x-y), \forall n \in \mathrm{N}, \ \forall x, y \in C.$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Jean Dieudonné (1978), "Cơ sở giải tích hiện đại", Nxb Đại học và Trung học chuyên nghiệp.
2. Lê Hoàn Hóa (2010), "Định lí điểm bất động và ứng dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình", *Đề tài khoa học* (mã số:CS.2088.19.02), *Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*.
3. Lê Hoàn Hóa, Nguyễn Ngọc Trọng (2011), "Tính R_d của tập nghiệm mạnh phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic", *Tạp chí Khoa học Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh,* 27(61), tr.1-14.
4. L. H. Hoa, K.Schmitt (1994), "Fixed point theorems of Krasnosel'skii type in locally convex space and applications to integral equation", *Results in Matematics*, Vol.25, pp.291-313.
5. Klaus Deimling (1985), "Nonlinear Functional Analysis", *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo*.
6. P.P.Zabreiko (1997), "K-metric and K-normed spaces: survey", *Collect. Math*. 48 (4-6) pp.825-859.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 28-10-2014; ngày phản biện đánh giá: 21-11-2014; ngày chấp nhận đăng: 22-11-2014)