

NGHIÊN CỨU MỘT ĐỒ ÁN DẠY HỌC CÁC HÀM SỐ TUẦN HOÀN BẰNG MÔ HÌNH HÓA TRONG MÔI TRƯỜNG HÌNH HỌC ĐỘNG (PHẦN 2)

NGUYỄN THỊ ANH*

TÓM TẮT

Bài báo này là sự tiếp nối của bài báo “Nghiên cứu một đồ án dạy học các hàm số tuần hoàn bằng mô hình hóa trong môi trường hình học động (phần 1)” [2]. Trong [2], chúng tôi đã trình bày những lựa chọn sư phạm của đồ án dạy học và kết quả của buổi thực nghiệm thứ nhất gồm các tình huống 1 và 2. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày chi tiết nội dung và kết quả của buổi thực nghiệm thứ hai (tình huống 3).

Từ khóa: hiện tượng tuần hoàn, hàm số tuần hoàn, mô hình hóa, hình học động.

ABSTRACT

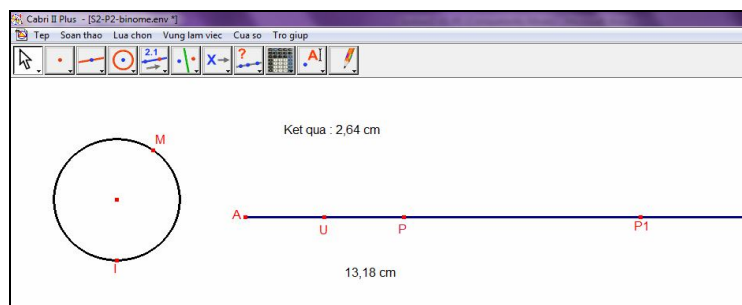
*Studying a project for teaching periodic functions
by modeling in dynamic geometry environment (Part 2)*

This paper is a continuation of the article "Studying a project for teaching periodic functions by modeling in dynamic geometry environment (Part 1)" [2]. In the first part, we present the pedagogical options of the teaching project and the results of the first experimental session consists of situations 1 and 2. In this paper we will present in great details the content and results of the second experiment (situation 3).

Keywords: periodic phenomena, periodic functions, modeling, dynamic geometry.

1. Nhắc lại kết quả buổi thực nghiệm thứ nhất

Ở buổi thực nghiệm thứ nhất, học sinh đã làm việc với hai tình huống 1 và 2 để xây dựng mô hình hình học trong Cabri biểu diễn chu quay, cabin của M và trục thời gian. [2]



Hình 1. Mô hình trung gian C và trục thời gian ở cuối buổi 1

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

Ở đây, đường tròn biểu diễn cho đu quay và điểm M biểu diễn cabin của M trên đu quay. Tia Ax biểu diễn trục thời gian, điểm P di động trên tia Ax điều khiển chuyển động của điểm M trên đường tròn. Độ dài AP tương ứng với một vòng của cabin M; độ dài AU tương ứng với sự chuyển động của M trên đường tròn trong 1 phút tính từ điểm I, nghĩa là khi P di chuyển từ A đến U thì nó điều khiển chuyển động của điểm M trong 1 phút tính từ I.

2. Phân tích chi tiết buổi thực nghiệm thứ hai

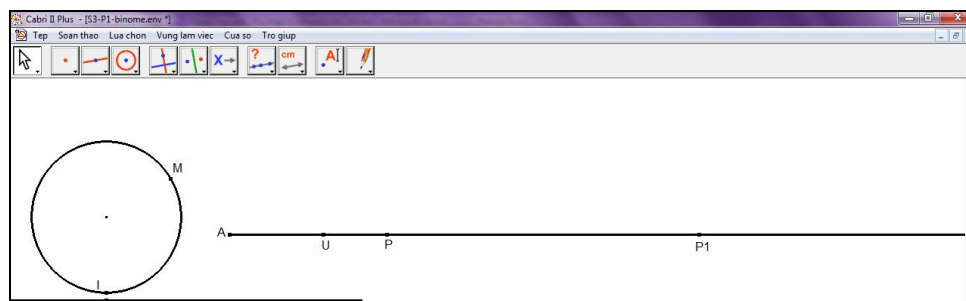
Buổi thực nghiệm thứ hai được tổ chức xoay quanh tình huống 3. Tình huống này đưa vào câu hỏi về những thời điểm mà cabin được chiếu sáng bởi một tia sáng chiếu sáng từng đợt. Bài toán trong tình huống này được phát biểu tổng quát như sau:

Một vòng đu quay kéo dài **T** phút. Cứ **m** phút tia sáng chiếu sáng trong **n** phút để chiếu sáng một vị trí L - nơi các cabin đi qua (ở độ cao **h**). Nếu một cabin được chiếu sáng khi nó đi qua vị trí L thì người ngồi trên cabin sẽ thắng một vòng miễn phí.

Câu hỏi:

- + M có thắng 1 vòng miễn phí không? Nếu có, sau bao nhiêu vòng chơi?
- + M có thể thắng thêm những lần khác không?

Trên màn hình Cabri xuất hiện mô hình trung gian C đã được xây dựng trong tình huống 1 và 2. Ngoài ra, có một đoạn thẳng biểu diễn mặt đất (xem hình 2).



Hình 2. Màn hình Cabri khi bắt đầu tình huống 3

Tình huống này đưa vào câu hỏi về sự trùng khớp của hai hiện tượng tuần hoàn là cabin M ở vị trí L (chu kỳ **T** phút) và đèn được chiếu sáng (cứ **m** phút chiếu sáng trong **n** phút). Để giải quyết bài toán này đòi hỏi phải thao tác trên hai chu kỳ của hai hiện tượng và làm tiến triển mô hình trung gian của các tình huống 1 và 2 về một mô hình hàm số tính toán được.

Câu trả lời của tình huống phụ thuộc vào bộ 4 giá trị (T, n, m, h). Trong bộ bốn này, thời gian của một vòng được chúng tôi cố định là 5 phút và thời gian chiếu sáng của tia sáng là 1 phút. Đề án quan tâm đến sự thay đổi của cặp giá trị (m, h). Cặp (m, h) nhận lần lượt các giá trị (3 phút, 35 m) ở pha 1 và (4 phút, 20 m) ở pha 4.

Chúng tôi tóm tắt sự lựa chọn giá trị của các biến trong pha 1 và pha 4 trong bảng sau:

Bảng 1. Các lựa chọn khác nhau trong pha 1 và pha 4

	T	n	m	h	Thời điểm trùng khớp đầu tiên	Thời điểm trùng khớp tiếp theo	Đường hình sin
Pha 1	5	1	3	35	gần (vòng thứ 2)	sau 3 vòng	không cho trước
Pha 4			4	20	xa (vòng thứ 4)	sau 4 vòng	cho trước

Thực nghiệm được tiến hành thành 5 pha trong thời gian 2,5h. Trong phạm vi cho phép của bài báo, chúng tôi chỉ tập trung vào phân tích các pha 1 và 4 nhằm làm rõ việc sử dụng tính tuần hoàn của các hiện tượng và sự nối khớp giữa hai mô hình C và O. Sau đây là các chiến lược có thể để giải quyết bài toán về sự trùng khớp.

- Chiến lược đồ thị một chiều

• Tia \rightarrow đường tròn : thời gian tuyến tính được chuyển thành thời gian quay vòng trên đường tròn

+ Đánh dấu trên đường tròn một điểm L ở vị trí mà tia sáng chiếu sáng ;

+ Tìm trên đường tròn những cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng;

+ Tìm thời điểm trùng khớp đầu tiên: điểm L thuộc vào một trong những cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng.

Trong Cabri, chiến lược này đòi hỏi phải phân biệt các cung được (và không được) chiếu sáng, đồng thời cần tính đến các vòng khác nhau của đu quay. Vì vậy, chiến lược này đòi hỏi khá nhiều thao tác và thời gian.

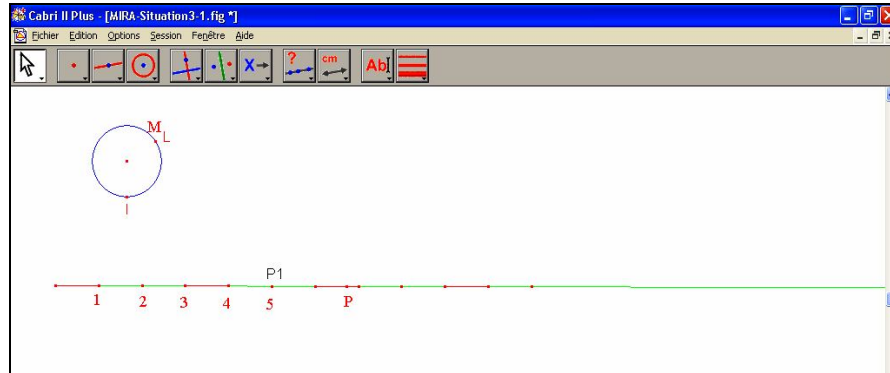
Trong môi trường giấy bút, chiến lược này ít khó khăn hơn với điểm L được đặt tương đối trên đường tròn và các cung được đánh dấu bởi việc đồ nhiều nét bút lên cung. Chúng ta sẽ thấy điều này trong các sản phẩm của học sinh.

• Đường tròn \rightarrow Tia: thời gian quay vòng được chuyển thành thời gian tuyến tính trên một tia

+ Đặt điểm L trên đường tròn;

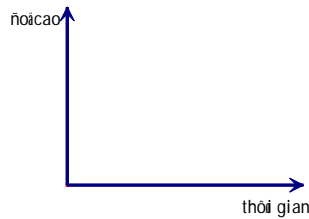
+ Tìm trên trục thời gian các đoạn thẳng biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng;

+ Di chuyển điểm P trên trục thời gian, tìm thời điểm trùng khớp: điểm M trùng với điểm L và điểm P thuộc vào một trong các đoạn thẳng biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng.

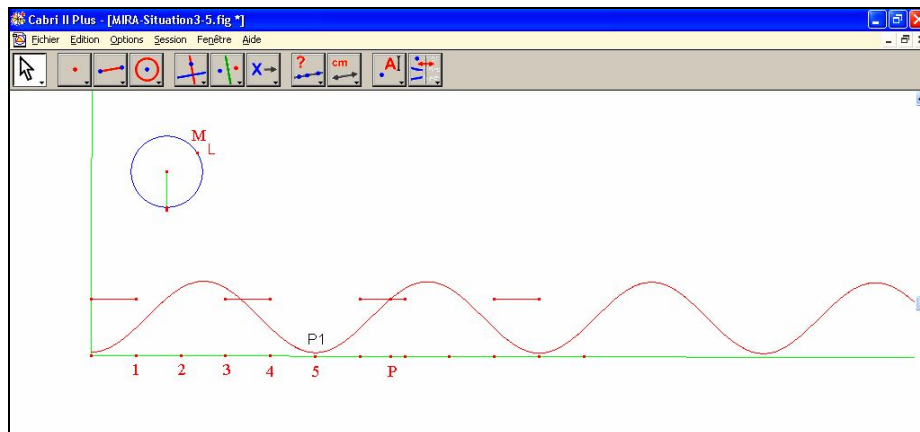


Hình 3. Đánh dấu thời gian chiếu sáng của tia sáng trên trục thời gian

- Chiến lược đồ thị hai chiều: thời gian tuyến tính và độ cao



- + Tìm trên trục thời gian các đoạn thẳng biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng;
- + Dựng ảnh của các đoạn thẳng này ở độ cao h ;
- + Dựng những đoạn thẳng vuông góc với trục thời gian với gốc là P , đi qua điểm M' sao cho $PM' = HM$ (với H là hình chiếu của M lên đoạn thẳng biểu diễn mặt đất). Vết của các đầu mút M' (nhận được trong Cabri) là một đường hình sin;
- + Hoàn độ giao điểm của các đoạn thẳng biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng và đường hình sin là các thời điểm trùng khớp.



Hình 4. Chiến lược đồ thị hai chiều trên màn hình Cabri

Chiến lược “đồ thị hai chiều” khó xuất hiện vì nó tham chiếu vào mô hình O trong khi quá trình mô hình hóa ở buổi 1 đã xây dựng mô hình C. Tuy trực thời gian tạo thuận lợi cho bước chuyển qua mô hình O nhưng những phân tích sách giáo khoa của chúng tôi đã chỉ ra rằng kĩ thuật thực hiện bước chuyển này hoàn toàn vắng bóng kể cả ở lớp 12 khi các dao động điều hòa được đưa vào.

Đối với chiến lược “đồ thị một chiều”, hai lời giải trong Cabri (đường tròn \rightarrow tia trong Cabri và tia \rightarrow đường tròn trong Cabri) khó thực hiện vì phải thực hiện chuyển số đo. Chiến lược tia \rightarrow đường tròn trên giấy ít khó khăn hơn vì nó sử dụng tri giác để đặt điểm L trên đường tròn và đánh dấu những cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng. Tuy vậy, nó đặt ra câu hỏi về sự chính xác của vị trí L và các cung. Chiến lược này dựa trên mô hình C đã xây dựng trong buổi 1 và chúng ta có thể dự đoán rằng nó sẽ chiếm ưu thế.

Việc trả lời câu hỏi “M có thể thắng thêm những lần khác không ?” đòi hỏi phải sử dụng tính tuần hoàn của các hiện tượng.

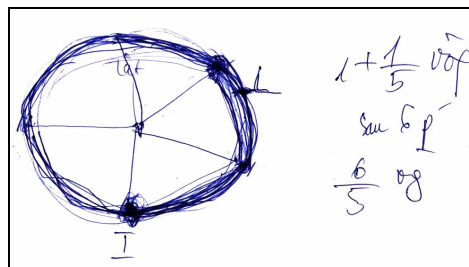
2.1. Phân tích kết quả pha 1

Chúng tôi trình bày trong bảng sau những chiến lược được sử dụng bởi học sinh để tìm các thời điểm trùng khớp

Bảng 2. Các chiến lược xuất hiện trong pha 1

Chiến lược		Nhóm
Đồ thị một chiều	Tia \rightarrow đường tròn trong Cabri	1
	Tia \rightarrow đường tròn trên giấy	2, 3, 5, 6
	Đường tròn \rightarrow tia trong Cabri	4
Đồ thị hai chiều		-

Các nhóm 1, 2, 3 và 6 sử dụng đường tròn như là đường đi của cabin M để tính quãng đường đi được theo thời gian. Đường tròn được chia (một cách tương đối) thành 5 phần, HS dùng bút để đánh dấu và đếm các vòng khác nhau. Đây là bằng chứng của việc sử dụng tính tuần hoàn.



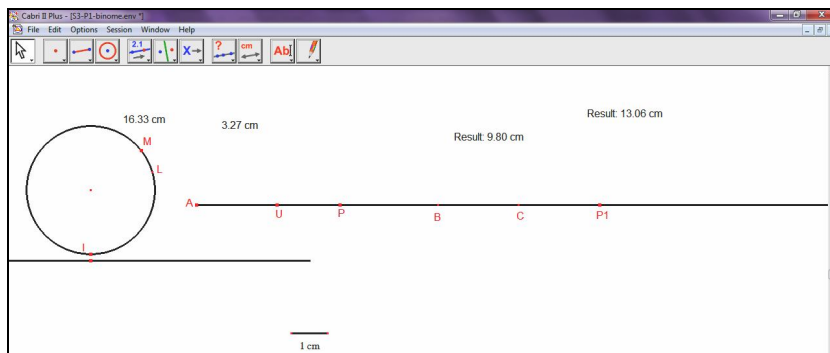
Hình 5. Giấy nháp của nhóm 6

Chẳng hạn, sau đây là câu trả lời của nhóm 1 :

Trả lời và giải thích câu trả lời của em :
 Giả 1 phút = $\frac{1}{5}$ quãng đường \Rightarrow đi qua 3 phút + 1 phút tia sáng chiếu
 sáng sẽ là $\frac{4}{5}$ quãng đường. ~~thời gian~~ Mà theo tính toán để lâu, L
 nằm ở $\frac{2}{5}$ quãng đường. Vậy vòng 1 sẽ không được. Đến vòng 2
 vì còn thiếu 1 quãng đường ở vòng 1 nên cabin của M chỉ đi 2
 phút ~~sẽ chiếu sáng~~ mỗi L nằm cách điểm I là $\frac{2}{5}$ quãng đường cũng
 sẽ chiếu sáng
 cùng 2 phút. Vậy M có thể thấy 1 vòng

Hình 6. Câu trả lời của nhóm 1

Ngược lại, nhóm 4 lập luận trên quãng đường cabin M đi được dọc theo trục thời gian trong Cabri:



Hình 7. Màn hình Cabri của nhóm 4

Câu trả lời của nhóm 4:

Trả lời và giải thích câu trả lời của em :
 M có thể thấy một vòng miễn phí. Sau $\frac{1}{12}$ vòng chờ. Có thể thêm những
 lần sau.
 Gọi B là điểm mà M đi từ được 3 phút. C là điểm M đi được 4 phút.
 Khi P đi từ A \rightarrow U thì điểm L tại (tia sáng), đi tiếp đến B thì điểm L
 sáng và khi đi đến C thì L tại. Vậy sau khi đi được 6 phút thì M sẽ
 gặp tia sáng.

Hình 8. Câu trả lời của nhóm 4

Như vậy trong pha này, chỉ có chiến lược đồ thị một chiều xuất hiện. Mô hình C (mô hình đã được xây dựng trong Cabri) được ưu tiên sử dụng bởi học sinh. Tuy nhiên, khó khăn trong việc đánh dấu các cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của đu quay dẫn đến 4/6 nhóm từ bỏ môi trường Cabri và chuyển hình vẽ sang giấy.

Sự tuần hoàn được khai thác bằng cách thu hẹp thời gian vào một không gian xác định là đường tròn chứ không khai triển hoàn toàn theo trục thời gian (trừ nhóm 4).

Tóm lại, ở thời điểm này, chỉ có hai nhóm 1 và 4 sử dụng đồng thời trục thời gian và mô hình C. Chiến lược đồ thị hai chiều hoàn toàn không xuất hiện. Thế nhưng, sự nối khớp giữa C và O lại đòi hỏi sự xuất hiện của đồ thị hai chiều. Vì vậy, chúng tôi xây dựng các pha trung gian (pha 2 và pha 3) để đưa vào đồ thị đó trong Cabri trước khi tạo ra sự cạnh tranh giữa hai mô hình C và O trong pha 4. Do khuôn khổ có hạn của bài báo, chúng tôi bỏ qua việc phân tích chi tiết hai pha này.

2.2. Phân tích kết quả pha 4

Câu hỏi đặt ra trong pha này tương tự như pha 1 nhưng giá trị của cặp (m, h) là (4, 20) làm cho thời điểm trùng khớp đầu tiên xa gốc thời gian (ở vòng thứ 4). Điều này tạo thuận lợi cho việc sử dụng tính tuần hoàn của các hiện tượng.

Sau đây là yêu cầu đặt ra cho HS :

Người quản lí đu quay quyết định thay đổi chiều cao của tia sáng là 20 m ở phía bên phải đu quay. Cứ 4 phút tia sáng chiếu sáng trong 1 phút.

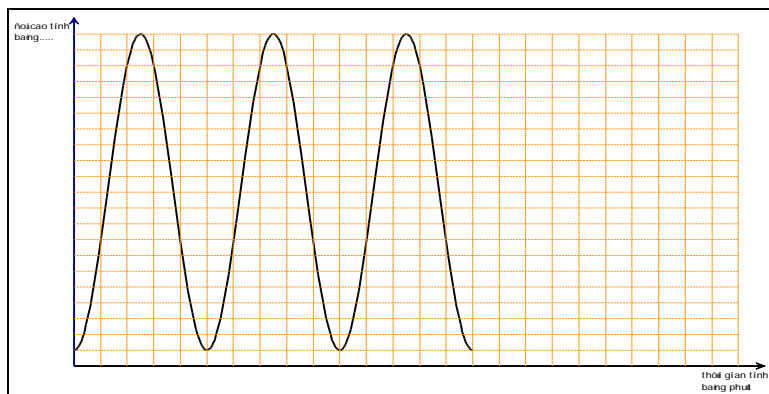
Câu hỏi:

M có thắng một vòng miễn phí không? Nếu có, sau bao nhiêu vòng chơi?

M có thể thắng thêm những lần khác không?

Ở đây, chiến lược đồ thị một chiều sẽ khó thực hiện hơn trong pha 1 vì sự kết hợp của việc đếm đồng thời số vòng và các cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng.

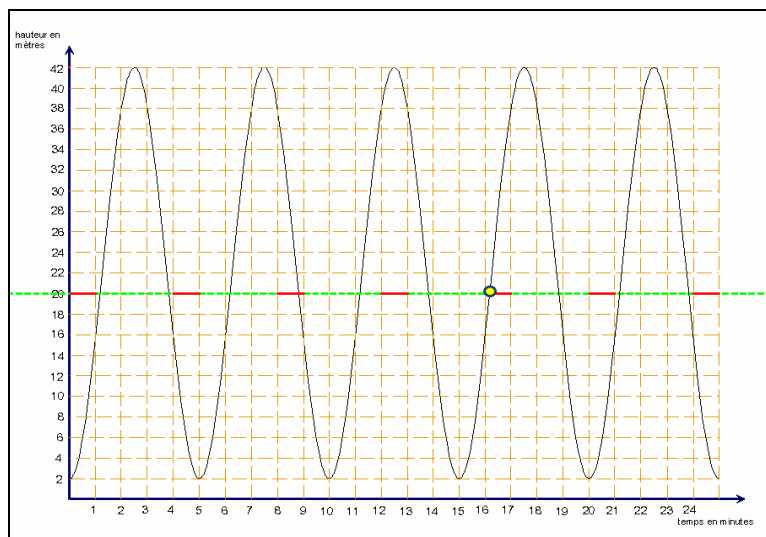
Ngoài màn hình Cabri, học sinh được phát một tờ giấy biểu diễn đường đi của điểm M¹ trong hệ trục tọa độ Đề-các với 3 cung được vẽ và chỗ trống cho 2 cung khác. Các trục thời gian và độ cao của cabin đến mặt đất được đặt tên.



Hình 9. Đồ thị biểu diễn đường đi của điểm M¹

Việc phát đồ thị hình sin trong pha này có thể khuyến khích học sinh sử dụng đồ thị gắn với mô hình O hơn là sử dụng mô hình C. Như vậy, pha này tạo ra một sự ngắt quãng với các pha trước vì các pha trước đã cho sẵn mô hình C.

Trong môi trường giấy bút, chiến lược này cần phải quay trở lại cung đầu tiên sau 3 cung (15 phút) hoặc là kéo dài đồ thị với ít nhất một cung như trong hình sau đây:



Hình 10. Chiến lược đồ thị hai chiều trong pha 4

Tương tự như trong pha 1, chiến lược đồ thị hai chiều là chiến lược tối ưu vì nó cho phép tổng quát hóa bài toán mà không cần lặp lại tất cả quá trình.

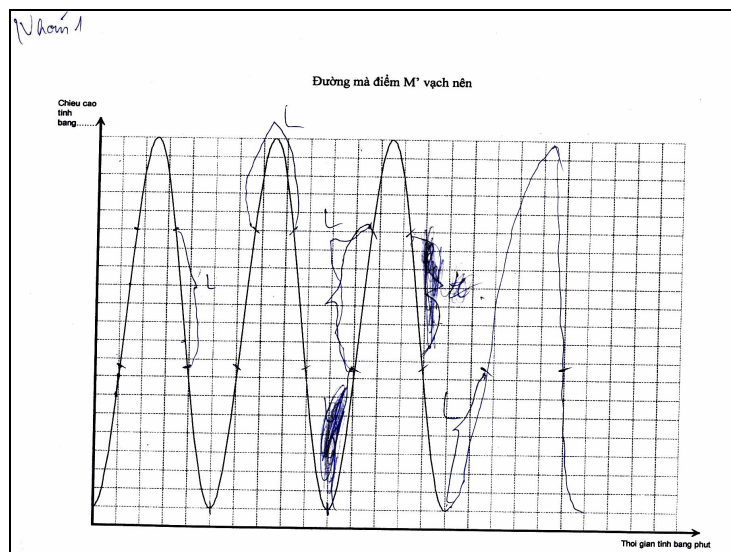
Chúng tôi tóm tắt các chiến lược được HS sử dụng trong bảng sau :

Bảng 3. Các chiến lược xuất hiện trong pha 4

Chiến lược		Nhóm
Đồ thị một chiều	Tia → đường tròn trong Cabri	-
	Tia → đường tròn trên giấy	2, 3, 4, 5, 6
Đồ thị hai chiều		1

Trong pha này, mặc dù đồ thị biểu diễn độ cao của cabin M theo thời gian đã được cho sẵn, chúng ta vẫn thấy sự thống trị của chiến lược đồ thị một chiều. Không có bất cứ dấu vết nào để lại trên đồ thị của các nhóm 2, 3, 4 và 6. Với các nhóm này, đồ thị được cho chỉ là một phương tiện minh họa chứ không được khai thác để giải quyết bài toán. Nhóm 5 đã sử dụng đồ thị để trả lời câu hỏi về độ cao và thời gian (phần đầu của pha 4). Tuy nhiên, với bài toán về sự trùng khớp, nhóm này quay trở lại chiến lược đồ thị một chiều (vẽ đường tròn trên giấy).

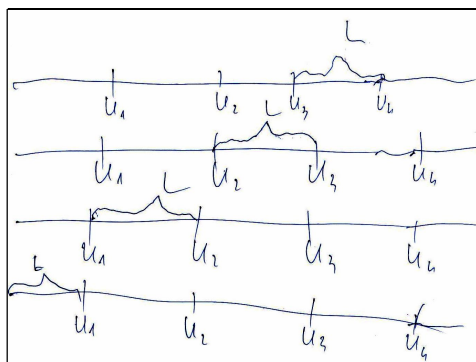
Chỉ có nhóm 1 sử dụng đồ thị hai chiều trong pha này. Học sinh mở rộng đồ thị thêm một cung và chia mỗi cung thành 5 phần (dựa theo các ô vuông chia độ trên tờ giấy) tương ứng với 5 phút.



Hình 11. Dấu vết trên đồ thị của nhóm 1

Các khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng được đánh dấu trên đồ thị (kí hiệu L). Chúng ta thấy ở đây học sinh mắc sai lầm về mối liên hệ giữa các đại lượng biến được thể hiện trên đồ thị và về cách đọc các giá trị của các đại lượng trên đồ thị. Các sai lầm này chứng tỏ sự nối khớp không đầy đủ giữa các mô hình C và O ở học sinh.

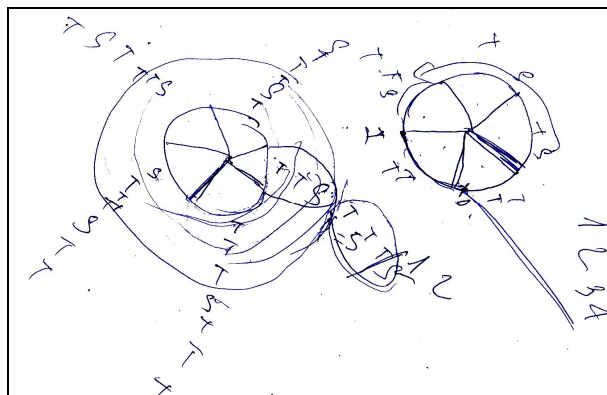
Tuy nhiên sau đó, nhóm này từ bỏ việc sử dụng đường hình sin để thực hiện việc dàn trải thời gian trên những đoạn thẳng song song.



Hình 12. Giấy nháp của nhóm 1

Như vậy, chiến lược mà nhóm này sử dụng là chiến lược đồ thị hai chiều (thời gian theo các đoạn thẳng và số vòng).

Chúng tôi muốn minh họa sản phẩm của nhóm 2, một trong bốn nhóm vẽ trên giấy nháp đường tròn để thực hiện chiến lược đồ thị một chiều.



Hình 13. Giấy nháp của nhóm 2

Đường tròn thứ nhất được sử dụng để biểu diễn đường đi của cabin M với vị trí của điểm D (L) ở độ cao 20 m. Các đường tròn khác được sử dụng để đánh dấu và đếm các khoảng chiếu sáng của tia sáng (T: tắt, S: sáng). Chiến lược này cho phép nhóm 2 đưa ra câu trả lời đúng (M thẳng sau 4 vòng chơi). Nhóm 3 cũng có chiến lược tương tự và cho câu trả lời đúng. Còn lại nhóm 4, 5 và 6 chỉ sử dụng 1 đường tròn duy nhất và họ cho kết quả nhầm lẫn vì các khó khăn của việc đếm đồng thời số vòng và các cung biểu diễn khoảng thời gian chiếu sáng của tia sáng trên cùng 1 đường tròn.

2.3. Kết luận của buổi thứ hai

Việc thực nghiệm đồ án đã chỉ ra rằng bài toán về sự trùng khớp giữa hai hiện tượng tuần hoàn được chọn là hợp thức để xem xét tính tuần hoàn của mỗi hiện tượng được nghiên cứu và thao tác với chúng. Hơn nữa, thực nghiệm này cũng cho thấy rằng học sinh nhận biết và sử dụng được sự tuần hoàn dưới nhiều hình thức khác nhau.

- + Tuần hoàn theo các vòng trên đường tròn, thời gian rời rạc, mô hình C;
- + Tuần hoàn theo các đoạn thẳng trên một tia được chia độ, thời gian tuyến tính liên tục;
- + Tuần hoàn theo các cung của đường hình sin, thời gian tuyến tính liên tục, mô hình O;
- + Tuần hoàn theo các đoạn thẳng song song, thời gian tuyến tính rời rạc.

Bước chuyển từ một trong hai mô hình C và O sang mô hình còn lại được diễn tả đối với biến thời gian bằng một sự dàn ra hay gập lại. Trong thể chế dạy học phổ thông ở Việt Nam, sự dàn ra được thể chế hóa với đường thẳng thời gian (đồ thị của các hiện tượng biến thiên theo thời gian). Ngược lại, sự gập lại chỉ tồn tại ngầm ẩn qua việc quân đường thẳng thực quanh đường tròn lượng giác (chương trình toán lớp 10). Đồ án dạy học này cho thấy rõ sự gập lại thời gian trên đường tròn bởi vì trong môi trường hình học động Cabri, sự điều khiển điểm M (di chuyển) bởi điểm P (thời gian) tạo ra khả năng đọc thời gian trên đường tròn. Việc gập lại thời gian trên đường tròn này được thực hiện bằng sự phân tích thành số vòng. Điều này gây ra sự rời rạc của thời gian mà sự hình thức hóa nó gắn liền với modun số học về mặt ngữ nghĩa.

3. Kết luận chung

Thực nghiệm đồ án sư phạm cho thấy tiềm năng của các phần mềm hình học động trong việc dạy học mô hình hóa ở trường phổ thông. Môi trường hình học động Cabri sử dụng trong đồ án cho phép thiết lập mô hình trung gian C, khai thác nó và làm tiến triển nó dần dần theo quá trình mô hình hóa.

Thực nghiệm cho thấy sự khó khăn của học sinh trong bước chuyển từ mô hình C sang mô hình O vì nó đòi hỏi phải tách đại lượng được chọn ở mô hình C để đặt trên trục thứ hai của một hệ trục tọa độ Đề-các có một trục xác định là trục thời gian.

Đồ án tạo ra một cách tiếp cận mới về các hàm số lượng giác, tạo ra sự ngắt quãng với các thực hành của thể chế, vì hàm số lượng giác nảy sinh từ một quá trình mô hình hóa tình huống ngoài toán học. Ở đây, các kiến thức về sự tuần hoàn được xây dựng như là sản phẩm của một quá trình toán học hóa một hiện tượng thực tế, đó là các hiện tượng tuần hoàn theo thời gian.

Đồ án đã tạo ra hai sự ngắt quãng đối với hợp đồng của thể chế trên các hàm số :

- Biểu diễn động của hàm số trong một môi trường tin học (buổi thứ 1);
- Hàm số là kết quả của quá trình mô hình hóa (buổi thứ 2).

Việc thực nghiệm đồ án đã chứng tỏ hiệu lực của các ràng buộc thể chế trên hoạt động của mỗi sự phá vỡ này.

Nghiên cứu đồ án dẫn chúng tôi đến việc đặt ra câu hỏi về khả năng dạy học liên môn Vật lí – Toán được xây dựng quanh những tình huống chứa đựng một quá trình mô hình hóa toán học các hiện tượng được nghiên cứu trong vật lí. Những tri thức toán học và vật lí nào có thể được tạo nên từ một quá trình mô hình hóa ngoài toán học trong các điều kiện thể chế hiện tại? Những tổ chức praxéologie (hỗ trợ toán-vật lí) nào mà thể chế ở trung học cần xây dựng để dạy học mô hình hóa toán học ?

¹ M' nằm trên đường thẳng đi qua P* và vuông góc với trục thời gian sao cho PM' = MH với H là hình chiếu của M lên đường thẳng biểu thị mặt đất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thị Nga (2012), *La périodicité dans les enseignements scientifiques : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation*, ISBN: 978-3-8383-8192-9, Éditions Universitaires Européennes.
2. Nguyễn Thị Nga (2013), “Nghiên cứu một đồ án dạy học các hàm số tuần hoàn bằng mô hình hóa trong môi trường hình học động (Phần 1)”, *Tạp chí Khoa học Đại học Sư phạm TP HCM*, 45(79), tr. 5 - 13.
3. Soury-Lavergne, S. & Bessot, A. (2012), *Modélisation des phénomènes variables à l'aide de la géométrie dynamique*, Actes du colloque Espace Mathématique Francophone, 3-7 février 2012, Genève.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 18-10-2012; ngày phân biện đánh giá: 13-5-2013;
ngày chấp nhận đăng: 24-7-2013)