# CHỈNH HÓA BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP MOMENT

ĐẶNG ĐỨC TRỌNG, PHẠM HOÀNG QUÂN*

## I. MỞ ĐẦU

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt nhằm xác định phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu $t = 0$ từ phân bố nhiệt độ đo được tại thời điểm sau đó, chẳng hạn tại $t = 1$. Bài toán này còn có thể coi như một bài toán điều khiển: bài toán điều khiển phân bố nhiệt độ ban đầu ($t = 0$) để có thể nhận được phân bố nhiệt độ như ý muốn tại thời điểm $t = 1$. Đây là bài toán không chỉnh theo nghĩa là nó không luôn luôn tồn tại nghiệm và ngay cả khi nghiệm của bài toán tồn tại thì nó lại không phụ thuộc liên tục theo dữ kiện. Bài toán này được rất nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát. Chúng ta có thể tham khảo [1], trong đó ngoài các tài liệu trích dẫn phong phú, tác giả còn cho ta một cái nhìn tổng quan về các phương pháp khảo sát cũng như chỉ ra những vấn đề còn bỏ ngỏ của bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Trong [3], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa như là tổ hợp tuyến tính một số hữu hạn các hàm riêng của toán tử $-\Delta$. Trong [4], tác giả chỉnh hóa bài toán trong trường hợp tổng quát như là một phương trình vi phân trong không gian Hilbert trừu tượng, trong [6], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa bằng phương pháp Tikhonov, trong [2], tác giả đưa bài toán thành bài toán moment và chỉnh hóa bằng đa thức Legendre.

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt trên mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ bằng cách chuyển về bài toán moment. Sau đó chúng tôi chỉnh hóa bằng cách sử dụng đa thức Müntz – Legendre áp dụng vào bài toán moment.

## II. ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Cho dãy $\{x_n\}, \{y_m\} \subset \mathbb{R}$.

Xét phương trình nhiệt

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$

* Khoa Toán – Tin, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM.

Ta xét bài toán tìm $u(x,y,0)=v(x,y)$ biết giá trị của u tại một dãy điểm $(x_n, y_m, 1)$.

Đặt

$$G(x,y,t,\xi,\eta,\tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4(t-\tau)}\right\} \quad (2)$$

Tích phân đẳng thức

$$\operatorname{div}(u\nabla G-G\nabla u)+\frac{\partial}{\partial\tau}(Gu)=0$$

trên miền $-n<\xi<n, -n<\eta<n, 0<\tau<t-\varepsilon$ với $0<\varepsilon<t$, sau đó cho $n\to\infty$ và $\varepsilon\downarrow 0$, chúng ta nhận được

$$u(x,y,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y,t,\xi,\eta,0)v(\xi,\eta)d\xi d\eta. \quad (3)$$

Cho $t\to 1$, ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4}\right]d\xi d\eta=4\pi u(x,y,1). \quad (4)$$

Gọi $N>e$ và đặt $D=[-\ln N,+\infty)\times[-\ln N,+\infty)$.

Giả sử $\operatorname{supp} v\subset D$.

Phương trình (4) trở thành

$$\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}v(\xi,\eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4}\right]d\xi d\eta=4\pi u(x,y,1),\ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad (5)$$

trong đó $u(x,y,1)$ là hàm giải tích theo x và y, được giả sử thuộc về $L^2(\mathbb{R}^2)$.

## III. ĐƯA VỀ BÀI TOÁN MOMENT VÀ CHỈNH HÓA

Cho $x=x_n$ và $y=y_n$, $n,m\in N$. Để bài toán đơn giản, ta xét

$$x_n=-2(1+\alpha_n),\ y_m=-2(1+\alpha_m).$$

Phương trình (5) suy ra

$$\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}v(\xi,\eta)e^{-\frac{(x_n-\xi)^2+(y_m-\eta)^2}{4}}d\xi d\eta=4\pi u(x_n,y_m,1) \quad (6)$$

với n, m = 0, 1, 2, …

Đặt $\xi=-\ln(Ns)$ và $\eta=-\ln(Nt)$, (6) trở thành

$$\int_0^1\int_0^1 v(-\ln(Ns),-\ln(Nt))e^{-\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}} s^{-\frac{x_n}{2}-1} t^{-\frac{y_m}{2}-1} dsdt$$

$$= 4\pi u(x_n, y_m, 1)e^{\frac{x_n^2+y_m^2}{4}}.N^{\frac{x_n+y_m}{2}} \tag{7}$$

Đặt $w(s,t) = v(-\ln(Ns),-\ln(Nt)).e^{-\frac{\ln^2(Ns)+\ln^2(Nt)}{4}}$ (8)

và $\mu_{mn} = 4\pi u(x_n, y_m, 1)e^{\frac{x_n^2+y_m^2}{4}}.N^{\frac{x_n+y_m}{2}}$ (9)

Từ (7)-(9), ta có :

$$\int_0^1\int_0^1 w(s,t)s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}dsdt = \mu_{mn}, \text{ với } m, n = 0, 1, 2,... \tag{10}$$

Xét phương trình

$$\int_0^1\int_0^1 w(s,t)s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}dsdt = \mu_{mn} \text{ với } m,n = 0, 1, ..., r. \tag{11}$$

***Định lý 1***

*Với $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$ thì bài toán (10) có nhiều nhất một nghiệm.*

***Chứng minh***

Để chứng minh định lý, ta cần bổ đề sau

***Bổ đề 1** (xem chứng minh trong [5])*

*Nếu $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n+\frac{1}{2}}{\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \infty$ và $\alpha_i > -\dfrac{1}{2}$ $\forall i$ thì $\{s^{\alpha_n}\}$ là họ đầy đủ trong C[0,1].*

Với $\alpha_n = \dfrac{n}{n+1}$ thì $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n+\frac{1}{2}}{\left(\alpha_n+\frac{1}{2}\right)^2+1} = \infty$, theo bổ đề 1, họ $\{s^{\alpha_n}\}$ đầy đủ trong $L^2(0,1)$ nên $\{s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\}$ đầy đủ trong $L^2((0,1)\times(0,1))$.

Nếu gọi $w_1$, $w_2$ là hai nghiệm của (11) thì

$$\left\langle w_1 - w_2, s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\right\rangle = 0 \quad \forall n, m = 0,1,2,...$$

trong đó < , > ký hiệu tích vô hướng trong $L^2((0,1)\times(0,1))$.

Do $\left\{s^{\alpha_n}t^{\alpha_m}\right\}$ đầy đủ trong $L^2((0,1)\times(0,1))$, ta có $w_1 = w_2$.

Định lý đã được chứng minh.

Bước đầu tiên ta trực chuẩn hóa họ $\left\{1, x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots\right\}$ bởi đa thức Müntz – Legendre trong [5] được xác định bởi

$$L_n\left\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\right\}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^{\alpha_k} \quad x\in(0,1] \tag{12}$$

với

$$a_{nk} = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_j+1)}{\prod_{k\neq j=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)} \tag{13}$$

Đặt $L_n^* := \sqrt{1+2\alpha_n}\,L_n$ thì $L_n^*$ là họ trực chuẩn hóa. (14)

Vậy $L_n^*\left\{\alpha_0,\ldots,\alpha_n\right\}(x) = \sum C_{nk}x^{\alpha_k}$, với $C_{nk} = \sqrt{1+2\alpha_n}\,a_{nk}$. (15)

Bây giờ đặt $L_{mn}^*(st) = L_m^*(s)L_n^*(t)$. (16)

Từ tính đầy đủ của $L_n^*$ trong $L^2(0,1)$ thì dãy $L_{mn}^*$ là họ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2(I)$ với $I = (0,1)\times(0,1)$. Ta có

$$L_{mn}^*(st) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}s^{\alpha_l}t^{\alpha_k}.$$

Nếu $\mu = (\mu_{mn})$ là dãy số thực, ta định nghĩa

$$\lambda = \lambda(\mu) = (\lambda_{mn}) \quad m,n = 0,1,\ldots$$

như sau

$$\lambda_{mn} = \lambda_{mn}(\mu) = \sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}\mu_{lk}.$$

Bây giờ, đặt

$$p^r = p^r(\mu) = \sum_{m,n=0}^{r} \lambda_{mn}(\mu)L_{mn}^* \tag{17}$$

và

$$q^r(\xi,\eta) = e^{\frac{\xi^2+\eta^2}{4}}\,p^r\left(\frac{e^{-\xi}}{N},\frac{e^{-\eta}}{N}\right). \tag{18}$$

***Định lý 2***

*Giả sử* $v_0 \in L^2(D)$ *là nghiệm chính xác của (6) tương ứng dữ kiện chính xác* $f^0_{mn} = 4\pi u_0(x_n, y_m, 1)$ *ở vế phải của (6)*

*Giả sử rằng dữ kiện do đo đạc là* $f_{mn} = 4\pi u(x_n, y_m, 1)$ *thỏa*

$$\sup_{m,n}\left|f_{mn} - f^0_{mn}\right| < \varepsilon \tag{20}$$

*Thì tồn tại nghiệm chính hóa* $v_\varepsilon$ *của* $v_0$ *thỏa* $v_\varepsilon g \in L^2(D)$

*và* $\|g(v_\varepsilon - v_0)\|_{L^2(D)} \le N(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varphi(\varepsilon)})$ *(21)*

*trong đó* $\varphi(\varepsilon) \to 0$ *khi* $\varepsilon \to 0$, $g(\xi,\eta) = e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{4}-\frac{\xi+\eta}{2}}$.

***Chứng minh***

Gọi $w_0$ là nghiệm chính xác của (10).

Để chứng minh định lý ta cần bổ đề sau đây

***Bổ đề 2*** *(Xem chứng minh trong [2])*

*Cho dãy* $\{\alpha_\varepsilon\}$ *như trong định lý 1 và cho* $\mu = (\mu_{mn})$ *là dãy số thực. Thì điều kiện cần và đủ để (11) có nghiệm duy nhất* $w \in L^2(I)$ *là*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty}\left(\sum_{l,k=0}^{\infty} C_{ml}C_{nk}\mu_{lk}\right)^2 < \infty \tag{19}$$

*trong đó* $C_{nk}$, *k, n = 0, ... được xác định trong (15) nếu* $k \le n$ *và* $C_{nk} = 0$ *nếu* $n < k$.

Để bắt đầu chứng minh định lý, ta có

$$\|p^r(\mu) - w_0\|_{L^2(I)} \le \|p^r(\mu) - p^r(\mu^0)\|_{L^2(I)} + \|p^r(\mu^0) - w_0\|_{L^2(I)}. \tag{22}$$

Từ (17), ta nhận được

$$p^r(\mu) - p^r(\mu_0) = \sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}(\mu_{lk} - \mu^0_{lk})L^*_{mn}\right). \tag{23}$$

Suy ra

$$\|p^r(\mu) - p^r(\mu_0)\|^2_{L^2(I)} = \sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_{ml}C_{nk}(\mu_{lk} - \mu^0_{lk})\right)^2$$

$$\le \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}\left(\sum_{l=0}^{m}|C_{ml}|\right)^2\left(\sum_{k=0}^{n}|C_{nk}|\right)^2. \tag{24}$$

Từ (15), ta có

$$C_{nk} = \sqrt{1+2\alpha_n}\,\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(\alpha_k+\alpha_j+1)}{\prod_{k\neq j=0}^{n}(\alpha_k-\alpha_j)}$$

$$\leq \sqrt{1+2\alpha_n}\,\frac{3^n}{\prod_{k\neq j=0}^{n}\frac{(j-k)}{(j+1)(k+1)}}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n\frac{(k+1)^n(n+1)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n\frac{(k+1)^n n!(n+1)k}{k!(n-k)!}$$

$$\leq \sqrt{3}3^n(k+1)^n(n+1)k\binom{n}{k}$$

trong đó $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vậy

$$\sum_{k=0}^{n}\left|C_n^k\right| \leq 3^n\sqrt{3}(n+1)^{n+2}n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$\leq 6^n\sqrt{3}(n+1)^{n+1}n \equiv h(n). \qquad (25)$$

Từ (24), (25) suy ra

$$\left\|p^r(\mu)-p^r(\mu_0)\right\|_{L^2(I)}^2 \leq \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}h^2(m).h^2(n)$$

$$\leq \varepsilon^2 e^{16}\sum_{m,n=0}^{r}3.6^{2(m+n)}(n+1)^{2(n+1)}(m+1)^{2(m+1)}nm$$

$$\leq 3\varepsilon^2 e^{16}(r+1)^{4(r+1)}r^2\left(\sum_{m=0}^{r}6^{2m}\right)^2$$

$$\leq \frac{3}{25}\varepsilon^2 e^{16}(r+1)^{4(r+1)}r^2 6^{4r}. \qquad (26)$$

Gọi $r(\varepsilon) = [r]+1$, trong đó $r$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{3}{25}e^{16}(r+1)^{4(r+1)}r^2 6^{4r}=\frac{1}{\varepsilon}. \tag{27}$$

Từ (26) và (27), ta nhận được

$$\left\|p^{r(\varepsilon)}(\mu)-p^{r(\varepsilon)}(\mu_0)\right\|^2_{L^2(I)} \le \varepsilon. \tag{28}$$

Đồng thời ta có

$$\left\|p^{r(\varepsilon)}(\mu_0)-w_0\right\|^2_{L^2(I)}=\sum_{\max\{m,n\}\ge r(\varepsilon)}^{+\infty}\left(\sum_{l,k=0}^{\infty}C_{ml}C_{nk}\mu_{lk}\right)^2 \equiv \varphi(\varepsilon). \tag{29}$$

Chú ý rằng từ (19) và (27), khi $\varepsilon \to 0$ thì $r(\varepsilon)\to\infty$ và $\varphi(\varepsilon)\to 0$.

Từ (28) và (29), ta có :

$$\left\|p^{r(\varepsilon)}(\mu)-w_0\right\|_{L^2(I)} \le \sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varphi(\varepsilon)}. \tag{30}$$

Kết hợp với

$$\begin{aligned}\left\|p^{r(\varepsilon)}-w\right\|^2_{L^2(I)} &= \int_0^1\int_0^1\left|p^{r(\varepsilon)}(s,t)-w(s,t)\right|^2 dsdt\\ &=\frac{1}{N^2}\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}\left[p^{r(\varepsilon)}\left(\frac{e^{-\xi}}{N},\frac{e^{-\eta}}{N}\right)-w\left(\frac{e^{-\xi}}{N},\frac{e^{-\eta}}{N}\right)\right]^2 e^{-(\xi+\eta)}d\xi d\eta\\ &=\frac{1}{N^2}\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}\left[q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta)-v(\xi,\eta)\right]^2 e^{-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}-(\xi+\eta)}d\xi d\eta\\ &=\frac{1}{N^2}\int_{-\ln N}^{+\infty}\int_{-\ln N}^{+\infty}\left[\left(q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta)-v(\xi,\eta)\right)g(\xi,\eta)\right]^2 d\xi d\eta.\end{aligned}$$

Nếu đặt $v_\varepsilon(\xi,\eta)=q^{r(\varepsilon)}(\xi,\eta)$ với $(\xi,\eta)\in D$.

Từ đó

$$\left\|(v_\varepsilon-v_0)g\right\|_{L^2(D)} \le N(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varphi(\varepsilon)}) \tag{31}$$

Định lý đã được chứng minh.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] DANG DINH ANG, (1990), *On the backward parabolic equation: A critical survey of some current methods*, Nummerical Analysis and Mathematical Modelling, Warsaw, 509-515.

[2] D. D. ANG, R. GORENFLO, L. K. VY AND D. D. TRONG, (2002), *Moment Theory and Some Inverse Problems in Potential Theory and Heat Conduction*, Lecture Notes in Mathematics, Springer.

[3] DANG DINH ANG and DANG DINH HAI, (1990), *On the backward heat equation*, Annales, Polomici Mathematici, LII, 29-32.

[4] DANG DINH ANG, (1985), *Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution*, J. Math. Anal. Appl., 1, 148-155.

[5] PETER BORWEIN AND TAMAS ERDELYI, (1995), *Polynomials and polynomial Inequalities*, Graduate Texts in Mathematics, Springer – Verlag.

[6] NGUYEN CAM and PHAM HOANG QUAN, (5-1998), *Chỉnh hóa bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt*, Tạp chí Phát Triển Khoa Học Công Nghệ, Tập 1, 5-10.

[7] A. N. TIKHONOV and V. Y. ARSENIN, (1977), *Solutions of ill-posed problem*, Winston, Washington.

**Abstract:**

**A MOMENT PROBLEM FROM THE BACKWARD HEAT EQUATION**

We consider the problem of identifying the temperature at $t = 0$ from a countable sequence of the values at $t = 1$. Using the Müntz – Legendre polynomial, we shall regularize the problem. Error estimates will be given.