MỘT ĐỊNH LÝ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG CỦA MỘT PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

NGUYỄN THÀNH LONG*, ĐINH VĂN RUY**

I. GIỚI THIỆU

Chúng tôi xét sự không tồn tại nghiệm dương của phương trình tích phân phi tuyến sau

$$u(x) = b_N \int_{IR^N} \frac{g(x, y, u(y))}{|y - x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N, \tag{1.1}$$

trong đó $b_N = 2((N-1)\omega_{N+1})^{-1}$ với ω_{N+1} là diện tích của mặt cầu đơn vị trong IR^{N+1}, $N \geq 2$; σ là một hằng số dương cho trước với $0 < \sigma < N$, và $g : IR^{2N} \times IR_+ \to IR$ là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện:

Tồn tại các hằng số $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ và $M > 0$ sao cho

$$g(x, y, u) \geq M \frac{|y|^\beta u^\alpha}{(1 + |x|)^\gamma}, \ \forall x, y \in IR^N, \ \forall u \geq 0, \tag{1.2}$$

và một số điều kiện phụ sau đó.

Trong trường hợp $\sigma = N - 1$, phương trình tích phân (1.1) được thành lập từ bài toán Neumann phi tuyến sau đây

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{N+1} v_{x_i x_i} = 0, \ x \in IR^N, \ x_{N+1} > 0, \tag{1.3}$$

$$-v_{x_{N+1}}(x, 0) = g(x, v(x, 0)), \ x \in IR^N, \tag{1.4}$$

mà giá trị biên $u(x) = v(x, 0)$ cùng với một số điều kiện phụ, là nghiệm của phương trình tích phân

$$u(x) = b_N \int_{IR^N} \frac{g(y, u(y))}{|y - x|^{N-1}} dy, \ \forall x \in IR^N. \tag{1.5}$$

Trong [1] các tác giả Bunkin, Galaktionov, Kirichenko, Kurdyumov, Samarsky đã nghiên cứu bài toán (1.3), (1.4) với $N = 2$ và phương trình Laplace (1.3) có dạng đối xứng trục

---

* Khoa Toán- Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp. HCM.
** Trường Cao đẳng Công nghiệp 4 Tp. HCM.

(1.6) $$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{zz} = 0,\ \forall r > 0,\ \forall z > 0,$$

và với điều kiện biên phi tuyến có dạng cụ thể như sau

(1.7) $$-u_z(r,0) = I_0 \exp(-r^2/r_0^2) + u^{\alpha}(r,0),\quad \forall r \geq 0,$$

trong đó I_0, r_0, α là các hằng số dương cho trước. Bài toán (1.6), (1.7) là trường hợp dừng của bài toán liên hệ với sự đốt cháy bởi bức xạ. Trong trường hợp $0 < \alpha \leq 2$ các tác giả trong [1] đã chứng minh rằng bài toán (1.6), (1.7) không có nghiệm dương. Sau đó, kết quả này đã được mở rộng bởi Long, Ruy[7] cho điều kiện biên phi tuyến tổng quát

(1.8) $$-u_z(r,0) = g(r,u(r,0)),\ \forall r \geq 0.$$

Trong [8] bài toán (1.3), (1.4) được xét với $N = 2$ và hàm g là liên tục, không giảm và bị chặn dưới bởi một hàm lũy thừa bậc α đối với biến thứ ba. Chúng tôi đã chứng minh rằng nếu $0 < \alpha \leq 2$ bài toán như thế không có nghiệm dương[8].

Trong [2-3] chúng tôi đã xét bài toán (1.3), (1.4) với $N \geq 3$. Hàm số $g : IR^N \times IR_+ \to IR_+$ là liên tục, không giảm đối với biến u, thỏa điều kiện (1.2) với $\gamma = 0$ và một số điều kiện phụ. Trong trường hợp $0 \leq \alpha \leq N/(N-1)$, $N \geq 2$ chúng tôi đã chứng minh rằng bài toán (1.3), (1.4) không có nghiệm dương[2-3].

Trong [5, 6] các tác giả đã chứng minh sự không tồn tại nghiệm dương của bài toán (1.3), (1.4) với

(1.9) $$g(x,u) = u^{\alpha}.$$

Trong [5] Hu và Yin đã chứng minh với $1 \leq \alpha < N/(N-1)$, $N \geq 2$, và trong [6] Hu đã chứng minh với $1 < \alpha < (N+1)/(N-1)$, $N \geq 2$.

Cũng cần chú ý rằng hàm $g(x,u) = u^{\alpha}$ không thỏa các điều kiện được giả thiết trong các bài báo [2, 7, 10].

Trong bài báo này, chúng tôi xét phương trình tích phân phi tuyến (1.1) với $0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}$, $N \geq 2$. Hàm $g(x,y,u)$ liên tục thỏa điều kiện (1.2) mà (1.9) là một trường hợp riêng. Bằng chứng minh sơ cấp chúng tôi tổng quát hóa các kết quả trong [1-11] rằng nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$, phương trình (1.1) không có nghiệm liên tục dương.

II. SỰ KHÔNG TỒN TẠI NGHIỆM DƯƠNG

Không làm mất tính tổng quát, chúng ta có thể giả sử rằng $b_N = 1$ với việc thay đổi hằng số M trong giả thiết (1.2) của g. Phương trình tích phân (1.1) được viết lại với $b_N = 1$:

$$(2.1) \qquad u(x) = Tu(x) \equiv \int_{IR^N} \frac{g(x,y,u(y))}{|y-x|^{\sigma}} dy, \ \forall x \in IR^N.$$

Khi đó ta có kết quả chính như sau.

Định lý. *Giả sử* $g : IR^{2N} \times IR_+ \to IR$ *là hàm liên tục thỏa điều kiện:*

Tồn tại các hằng số $M > 0, \alpha, \beta, \gamma \geq 0, 0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}, N \geq 2$ *sao cho*

$$(2.2) \qquad g(x,y,u) \geq M \frac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}}, \ \forall x, y \in IR^N, \forall u \geq 0.$$

Nếu $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$, *thì phương trình tích phân (2.1) không có nghiệm liên tục dương.*

Chú thích 1. Kết quả của định lý này mạnh hơn kết quả trong[2], [7]. Thật vậy, tương ứng với cùng phương trình (1.5), các giả thiết sau đây đã sử dụng trong [2], [7] không cần thiết ở đây

(G_1) $g(y,u)$ không giảm đối với biến u, i.e.,

$$(g(y,u) - g(y,v))(u - v) \geq 0, \ \forall u, v \geq 0, \ \forall y \in IR^N.$$

(G_2) Tích phân $\displaystyle\int_{IR^N} \frac{g(y,0)}{(1+|y|)^{N-1}} dy$ tồn tại và dương.

Trước tiên, chúng ta cần bổ đề sau đây mà chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong[10].

Bổ đề 1. *Với mỗi* $p \geq 0, q \geq 0, \ 0 < \sigma < N, \ x \in \mathrm{IR}^N$, đặt

$$(2.3) \qquad A[p,q](x) = \int_{IR^N} \frac{|y|^p (1+|y|)^{-q}}{|y-x|^{\sigma}} dy.$$

Khi đó ta có

$$(2.4) \qquad A[p,q](x) = +\infty, \ \text{nếu } q - p \leq N - \sigma,$$

$$(2.5) \qquad A[p,q](x) \text{ hội tụ và } A[p,q](x) \geq \left(\frac{1}{N+p} + \frac{1}{q}\right) \frac{\omega_N}{2^{\sigma}} \frac{|x|^{p+N-\sigma}}{(1+|x|)^q},$$

nếu $q - p > N - \sigma$, *trong đó* ω_N *là diện tích của mặt cầu đơn vị trong* IR^N.

Chứng minh định lý. Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử rằng tồn tại một nghiệm dương liên tục $u(x)$ của phương trình tích phân (2.1). Giả sử rằng tồn tại $x_0 \in IR^N$, sao cho $u(x_0) > 0$. Vì u liên tục, do đó tồn tại $r_0 > 0$ sao cho

$$(2.6) \qquad u(x) > \frac{1}{2} u(x_0) \quad \text{với mọi } x \in IR^N, \ |x - x_0| \leq r_0.$$

Ta suy từ (2.1), (2.2), (2.6) và tính đơn điệu của toán tử tích phân rằng

(2.7) $$u(x) = Tu(x) \geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^{\beta} u^{\alpha}(y)}{|y-x|^{\sigma}} dy$$
$$\geq M(1+|x|)^{-\gamma} \left(\frac{1}{2}u(x_0)\right)^{\alpha} \int_{|y-x_0|\leq r_0} \frac{|y|^{\beta}}{|y-x|^{\sigma}} dy, \ \forall x \in IR^N.$$

Dùng bất đẳng thức

(2.8) $$|y-x| \leq |y|+|x| \leq (1+|x_0|+r_0)(1+|x|), \ \forall x, y \in IR^N, \ |y-x_0| \leq r_0,$$

ta thu được từ (2.7), (2.8) rằng

(2.9) $$u(x) \geq u_1(x) = m_1(1+|x|)^{-q_1}, \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó

(2.10) $$q_1 = \sigma + \gamma, \quad m_1 = M\left(\frac{1}{2}u(x_0)\right)^{\alpha}(1+|x_0|+r_0)^{-\sigma} \int_{|y-x_0|\leq r_0} |y|^{\beta} dy.$$

Dùng đẳng thức (2.1) một lần nữa, ta suy từ (2.2), (2.9) rằng

(2.11) $$u(x) = Tu(x) \geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^{\beta} u^{\alpha}(y)}{|y-x|^{\sigma}} dy$$
$$\geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^{\beta} u_1^{\alpha}(y)}{|y-x|^{\sigma}} dy$$
$$\geq M m_1^{\alpha}(1+|x|)^{-\gamma} A[\beta, \alpha q_1](x), \ \forall x \in IR^N.$$

Bây giờ, ta xét các trường hợp khác nhau của α.

Trường hợp 1: $0 \leq \alpha \leq (\beta + N - \sigma)/(\sigma + \gamma)$. Ta thu được từ (2.4), (2.11) với $p = \beta$, $q = \alpha q_1 = \alpha(\sigma+\gamma)$, $q - p = \alpha(\sigma+\gamma) - \beta \leq N - \sigma$, rằng

(2.12) $$u(x) = +\infty, \quad \forall x \in IR^N.$$

Điều này vô lý.

Trường hợp 2: $(\beta + N - \sigma)/(\sigma + \gamma) < \alpha < (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$. Dùng (2.5) với $p = \beta$, $q = \alpha q_1 = \alpha(\sigma+\gamma)$, $q - p = \alpha(\sigma+\gamma) - \beta > N - \sigma$, ta suy ra từ (2.11) rằng

(2.13) $$u(x) \geq u_2(x) = m_2 |x|^{p_2}(1+|x|)^{-q_2}, \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó

(2.14) $$p_2 = \beta + N - \sigma, \quad q_2 = \alpha q_1 + \gamma, \quad m_2 = M m_1^{\alpha} \frac{\omega_N}{2^{\sigma}}\left(\frac{1}{\beta+N} + \frac{1}{\alpha q_1}\right).$$

Giả sử rằng

(2.15) $$u(x) \geq u_{k-1}(x) = m_{k-1}|x|^{p_{k-1}}(1+|x|)^{-q_{k-1}}, \ \forall x \in IR^N.$$

Nếu $\alpha q_{k-1} - \beta - \alpha p_{k-1} > N - \sigma$, khi đó, sử dụng (2.1), (2.2), (2.5) và (2.15), ta thu được

(2.16) $$\begin{aligned} u(x) = Tu(x) &\geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma} dy \\ &\geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta u^\alpha_{k-1}(y)}{|y-x|^\sigma} dy \\ &\geq M m^\alpha_{k-1}(1+|x|)^{-\gamma} A[\beta+\alpha p_{k-1}, \alpha q_{k-1}](x) \\ &\geq M m^\alpha_{k-1}\left(\frac{1}{N+\beta+\alpha p_{k-1}} + \frac{1}{\alpha q_{k-1}}\right)\frac{\omega_N}{2^\sigma}|x|^{\beta+\alpha p_{k-1}+N-\sigma}(1+|x|)^{-\alpha q_{k-1}-\gamma}, \end{aligned}$$

$\forall x \in IR^N$.

Do đó

$$u(x) \geq u_k(x) = m_k|x|^{p_k}(1+|x|)^{-q_k}, \ \forall x \in IR^N,$$

trong đó các dãy $\{p_k\}, \{q_k\}, \{m_k\}$ được xác định bởi các công thức qui nạp

(2.17) $$\begin{cases} p_k = \beta + \alpha p_{k-1} + N - \sigma, \quad q_k = \alpha q_{k-1} + \gamma, \\ m_k = \dfrac{1}{2^\sigma} M \omega_N m^\alpha_{k-1}\left(\dfrac{1}{p_k+\sigma} + \dfrac{1}{\alpha q_{k-1}}\right), \ k \geq 3. \end{cases}$$

Từ (2.14), (2.17) ta thu được

(2.18) $$p_k = \begin{cases} (k-1)(\beta+N-\sigma), \quad \textit{nếu } \alpha = 1, \\ \left(\dfrac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\right)(\beta+N-\sigma), \\ \textit{nếu } (\beta+N-\sigma)/(\sigma+\gamma) < \alpha < (\beta+N)/(\sigma+\gamma), \alpha \neq 1, \end{cases}$$

(2.19) $$q_k = \begin{cases} \sigma + k\gamma, \quad \textit{nếu } \alpha = 1, \\ q_1\alpha^{k-1} + \gamma\left(\dfrac{1-\alpha^{k-1}}{1-\alpha}\right), \\ \textit{nếu } (\beta+N-\sigma)/(\sigma+\gamma) < \alpha < (\beta+N)/(\sigma+\gamma), \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Ta suy từ (2.1), (2.2) và (2.16), rằng

(2.20) $$u(x) \geq M m^\alpha_k (1+|x|)^{-\gamma} A[\beta+\alpha p_k, \alpha q_k](x), \ \forall x \in IR^N.$$

Như vậy, từ (2.19), (2.20), ta chỉ cần chọn số tự nhiên $k \geq 3$ sao cho

(2.21) $$\alpha q_k - \beta - \alpha p_k \leq N - \sigma < \alpha q_{k-1} - \beta - \alpha p_{k-1},$$

bởi vì, $A[\beta + \alpha p_k, \alpha q_k](x) = +\infty$.

Do (2.18), (2.19), (2.21) ta chọn k như sau

j) Nếu $\alpha = 1$, ta chọn k thỏa $\sigma/(\beta + N - \sigma - \gamma) \leq k < 1 + \sigma/(\beta + N - \sigma - \gamma)$.

jj) Nếu $(\beta + N - \sigma)/(\sigma + \gamma) < \alpha < (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$ và $\alpha \neq 1$, ta chọn k thỏa $k_0 \leq k < k_0 + 1$, với $k_0 = \dfrac{1}{\ln\alpha}\ln\left(\dfrac{\alpha\gamma + \sigma - \beta - N}{\alpha(\sigma + \gamma) - \beta - N}\right)$.

Trường hợp 3: $\alpha = (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$.

Ta viết lại (2.11) như sau

(2.22) $$u(x) \geq M(1 + |x|)^{-\gamma} \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta (1 + |y|)^{-\beta - N} dy}{|y - x|^\sigma}$$
$$= M m_1^\alpha (1 + |x|)^{-\gamma} A[\beta, \beta + N](x), \ \forall x \in IR^N.$$

Mặt khác, với mỗi $x \in IR^N$, $|x| \geq 1$, ta có

(2.23) $$A[\beta, \beta + N](x) \geq \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta (1 + |y|)^{-\beta - N} dy}{(|y| + |x|)^\sigma}$$
$$= \omega_N \int_0^{+\infty} \frac{r^{\beta + N - 1} dr}{(1 + r)^{\beta + N} (r + |x|)^\sigma}$$
$$\geq \omega_N \int_1^{|x|} \frac{r^{\beta + N - 1} dr}{(1 + r)^{\beta + N} (r + |x|)^\sigma} = \omega_N H(x).$$

Chú ý rằng với mỗi r sao cho $1 \leq r \leq |x|$, ta có

(2.24) $$\left(\frac{r}{1 + r}\right)^{\beta + N} \geq \frac{1}{2^{\beta + N}}, \text{ và } \frac{1}{(r + |x|)^{\sigma - 1}} \geq \frac{\min\{1, 2^{1 - \sigma}\}}{|x|^\sigma}.$$

Khi đó

(2.25) $$H(x) = \int_1^{|x|} \left(\frac{r}{1 + r}\right)^{\beta + N} \frac{1}{(r + |x|)^{\sigma - 1}} \frac{dr}{r(r + |x|)}$$
$$\geq \frac{1}{2^{\beta + N}} \cdot \frac{\min\{1, 2^{1 - \sigma}\}}{|x|^{\sigma - 1}} \cdot \int_1^{|x|} \frac{dr}{r(r + |x|)}$$
$$= \frac{1}{2^{\beta + N}} \cdot \frac{\min\{1, 2^{1 - \sigma}\}}{|x|^{\sigma - 1}} \cdot \ln\left(\frac{1 + |x|}{2}\right).$$

Ta suy ra từ (2.22), (2.23), (2.25) rằng

(2.26) $$u(x) \geq v_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| \leq 1, \\ C_2 |x|^{-\sigma}(1+|x|)^{-\gamma}.\left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{s_2}, & \text{nếu } |x| \geq 1, \end{cases}$$

với

(2.27) $$s_2 = 1, \quad C_2 = Mm_1^{\alpha}\omega_N \frac{\min\{1, 2^{1-\sigma}\}}{2^{\beta+N}}.$$

Giả sử rằng

(2.28) $$u(x) \geq v_{k-1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| \leq 1, \\ C_{k-1} |x|^{-\sigma}(1+|x|)^{-\gamma}.\left(\ln\left(\frac{1+|x|}{2}\right)\right)^{s_{k-1}}, & \text{nếu } |x| \geq 1, \end{cases}$$

và C_{k-1}, s_{k-1}, là các hằng số dương. Khi đó, sử dụng (2.1), (2.2), (2.28), ta có

(2.29) $$u(x) \geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{I\!R^N} \frac{|y|^{\beta} v_{k-1}^{\alpha}(y)}{|y-x|^{\sigma}} dy$$

$$\geq M(1+|x|)^{-\gamma} \int_{|y|\geq 1} \frac{|y|^{\beta} v_{k-1}^{\alpha}(y)}{(|y|+|x|)^{\sigma}} dy$$

$$= M(1+|x|)^{-\gamma} C_{k-1}^{\alpha} \int_{|y|\geq 1} \frac{|y|^{\beta}\left(\ln(\frac{1+|y|}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}}}{|y|^{\alpha\sigma}(1+|y|)^{\alpha\gamma}(|y|+|x|)^{\sigma}} dy$$

$$= M\omega_N C_{k-1}^{\alpha}(1+|x|)^{-\gamma} \int_1^{+\infty} \frac{r^{\beta-\alpha\sigma}\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}} r^{N-1} dr}{(1+r)^{\alpha\gamma}(r+|x|)^{\sigma}}$$

$$= M\omega_N C_{k-1}^{\alpha}(1+|x|)^{-\gamma} \int_1^{+\infty} \frac{r^{\beta+N-\alpha\sigma-1}\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}} dr}{(1+r)^{\alpha\gamma}(r+|x|)^{\sigma}}.$$

Xét $|x| \geq 1$, ta có

(2.30) $$\int_1^{+\infty} \frac{r^{\beta+N-\alpha\sigma-1}\left(\ln(\frac{1+r}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}} dr}{(1+r)^{\alpha\gamma}(r+|x|)^{\sigma}}$$

$$\geq \left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}} \int_{|x|}^{+\infty} \frac{r^{\beta+N-\alpha\sigma-1}\, dr}{(r+r)^{\alpha\gamma}(r+r)^{\sigma}}$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha\gamma+\sigma}}\left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}} \int_{|x|}^{+\infty} r^{-1-\sigma}\, dr$$

$$= \frac{1}{2^{\alpha\gamma+\sigma}} \cdot \frac{1}{|x|^{\alpha}} \cdot \left(\ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha s_{k-1}}.$$

Ta suy ra từ (2.29), (2.30), rằng

$$(2.31) \qquad u(x) \geq v_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{nếu } |x| \leq 1, \\ C_k |x|^{-\sigma}(1+|x|)^{-\gamma} \cdot \left(\ln\left(\frac{1+|x|}{2}\right)\right)^{s_k}, & \text{nếu } |x| \geq 1, \end{cases}$$

trong đó

$$(2.32) \qquad s_k = \alpha\ s_{k-1},\ C_k = \frac{1}{\sigma\, 2^{\alpha\gamma+\sigma}} M\omega_N C_{k-1}^{\alpha},\ k \geq 3.$$

Từ (2.27), (2.32), ta thu được

$$(2.33) \qquad s_k = s_2\alpha^{k-2} = \alpha^{k-2} = \left(\frac{\beta+N}{\sigma+\gamma}\right)^{k-2},\ C_k = \frac{1}{D}(DC_2)^{\alpha^{k-2}},$$

trong đó $D = \left(\frac{1}{\sigma\, 2^{\alpha\gamma+\sigma}} M\omega_N\right)^{1/(\alpha-1)}$

Khi đó, $|x| \geq 1$, ta viết lại (2.31) dưới dạng

$$(2.34) \qquad u(x) \geq v_k(x) = \frac{1}{D}|x|^{-\sigma}(1+|x|)^{-\gamma}\left(DC_2 \ln(\frac{1+|x|}{2})\right)^{\alpha^{k-2}}.$$

Chọn $x_1 \in IR^N$ sao cho $DC_2 \ln(\frac{1+|x_1|}{2}) > 1$. Do (2.34), ta suy ra rằng $u(x_1) = +\infty$.

Đó là điều mâu thuẫn.

Định lý được chứng minh hoàn tất.

Dựa vào định lý 1, ta có kết quả chính như sau.

Định lý 2. (Đ. V. Ruy[11]). *Cho* $g : IR^N \times IR_+ \to IR$ *là hàm liên tục thỏa điều kiện:*

Tồn tại các hằng số α, $\beta \geq 0$, $M > 0$, $0 < \sigma < \beta + N$, $N \geq 2$ *sao cho*

$$(2.35) \qquad g(y,u) \geq M|y|^{\beta} u^{\alpha},\ \forall y \in IR^N,\ \forall u \geq 0.$$

Khi đó, nếu $0 \le \alpha \le (\beta + N)/\sigma$ *thì phương trình tích phân*

(2.36) $$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N,$$

không có nghiệm liên tục dương.

Cụ thể với $g(x,y,u) = |y|^\beta u^\alpha$, ta có kết quả sau.

Định lý 3. *Giả sử các hằng số* $\beta \ge 0, \sigma > 0$ *thỏa điều kiện* $0 < \sigma < \beta + N$, $N \ge 2$.

Nếu $0 \le \alpha \le (\beta + N)/\sigma$ *thì phương trình tích phân:*

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{|y|^\beta u^\alpha(y)}{|y-x|^\sigma} dy, \ \forall x \in IR^N,$$

không có nghiệm liên tục dương.

Chú thích 2.

a) Trong trường hợp $\alpha = \dfrac{N}{\sigma}, \sigma = N-1, N = 2,$ đánh giá (2.31) thu được ở đây đơn giản hơn trong [1], trong khi ở [1] $v_k(r)$ được cho bởi một chuỗi hàm.

b) Trong trường hợp $g(y,u)$ ta chưa có kết luận về trường hợp $\alpha > N/(N-1)$, $N \ge 2$.

Tuy nhiên, khi $g(y,u) = u^\alpha$, $N \ge 2$, $N/(N-1) \le \alpha < (N+1)/(N-1)$, B. Hu [6] đã chứng minh rằng bài toán (1.3), (1.4), (1.9) không có nghiệm dương. Trong trường hợp "*giới hạn* "$\alpha = (N+1)/(N-1)$, thì nghiệm dương tồn tại (xem [4-6]). Trường hợp đặc biệt với $\alpha = (N+1)/(N-1)$, các tác giả trong [4] đã cho dạng tường minh của tất cả các nghiệm không âm không tầm thường $u \in C^2(IR_+^{N+1}) \cap C(\overline{IR_+^{N+1}})$ của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta u = a u^{\alpha + \frac{2}{N-1}} & trong \quad IR_+^{N+1}, \\ -u_{x_{N+1}}(x',0) = b u^\alpha (x',0) & trên \quad x_{N+1} = 0. \end{cases}$$

Các tác giả trong [4] đã chứng minh các kết quả sau:

(i) Nếu $a > 0$ hay $a \le 0, b > B = \sqrt{a(1-N)/(N+1)}$, thì

$$u(x) = C\left(\beta + |x - x^0|^2\right)^{(1-N)/2}$$

với các hằng số $C > 0, \beta \in IR$ nào đó và $x^0 = (x_1^0, \dots, x_{N+1}^0) \in IR^{N+1}$, trong đó $x_1^0 = \dfrac{b}{N-1} C^{2/(N-1)}$ và $\beta = \dfrac{a}{N^2-1} C^{4/(N-1)}$.

(ii) Nếu $a = b = 0$, thì $u(x) = C$ với $C > 0$ là hằng số nào đó.

(iii) Nếu $a = 0, b < 0$, thì $u(x) = Cx_1 + \left(\frac{-C}{b}\right)^{(N-1)/(N+1)}$ với $C > 0$ nào đó.

(iv) Nếu $a < 0, b = B$, thì $u(x) = \left(\frac{2B}{N-1}x_1 + C\right)^{(1-N)/2}$ với $C > 0$ nào đó.

(v) Nếu $a < 0$ và $b < B$, thì bài toán không tồn tại nghiệm không âm không tầm thường.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] F.V. Bunkin, V.A. Galaktionov, N.A. Kirichenko, S.P. Kurdyumov, A.A. Samarsky, (1988), *On a nonlinear boundary value problem of ignition by radiation*, J. Comp. Math. Phys. **28**, 549-559 (Russian).

[2] Dương Thị Thanh Bình, Trần Ngọc Diễm, Đinh Văn Ruy, Nguyễn Thành Long, (1998), *On a nonexistence of positive solution of a nonlinear Neumann problem in half-space* IR_+^n, Demonstratio Math. **31**, 773-782.

[3] Dương Thị Thanh Bình, Nguyễn Thành Long, (2000), *On the nonexistence of positive solution of Laplace equation in half-space* IR_+^n *with a nonlinear Neumann boundary condition*, Demonstratio Math. **33**, 365-372.

[4] M. Chipot, I. Shafrir, M. Fila, (1996), *On the solutions to some elliptic equations with nonlinear Neumann boundary conditions*, Advances in Diff. Equ.**1**, 91-110.

[5] B. Hu, H.M. Yin, (1994), *The profile near blow-up time for solution of the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Transactions of AMS. **346**, 117-135.

[6] B. Hu, (1994), *Nonexistence of a positive solution of the Laplace equation with a nonlinear boundary condition*, J. Diff. and Int. Equ. **7**, 301-313.

[7] Nguyễn Thành Long, Đinh Văn Ruy, (1995), *On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space with Cauchy data*, Demonstratio Math. **28**, 921-927.

[8] Nguyễn Thành Long, Dương Thị Thanh Bình, (2001), *On the nonexistence of positive solution of a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **34**, 837-845.

[9] Nguyễn Thành Long, Đinh Văn Ruy, (2003), *On the nonexistence of positive solution of some integral equation*, Demonstratio Math. **36**, No.2, 393-404.

[10] Đinh Văn Ruy, Nguyễn Thành Long, Dương Thị Thanh Bình, (1997), *On a nonexistence of positive solution of Laplace equation in upper half-space*, Demonstratio Math. **30**, 7-14.

[11] Đinh Văn Ruy, (2002), *Một định lý không tồn tại nghiệm dương của phương trình tích phân* $u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(y,u(y))}{|y-x|^\alpha}\, dy$., Tạp chí Phát triển KHCN, ĐHQG Tp. HCM, Tập **5**, Số 12, 5-10.

Tóm tắt:

Một định lý không tồn tại nghiệm dương của một phương trình tích phân

Chúng tôi xét phương trình tích phân phi tuyến sau đây

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(x, y, u(y))}{|y - x|^{\sigma}} dy, \ \forall x \in IR^N, \qquad (*)$$

trong đó σ *là một hằng số dương cho trước và* $g(x, y, u)$ *là hàm liên tục cho trước thỏa điều kiện* $g(x, y, u) \geq M \dfrac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}}, \forall x, y \in IR^N, \forall u \geq 0,$ *với* $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ *và* $M > 0$ *là các hằng số cho trước. Chúng tôi chứng minh theo cách sơ cấp rằng nếu* $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/(\sigma + \gamma), 0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}, N \geq 2$ *thì phương trình (*) không có nghiệm dương.*

Abstract:

A NONEXISTENCE THEOREM FOR POSITIVE SOLUTION OF A NONLINEAR INTEGRAL EQUATION

We consider the nonlinear integral equation

$$u(x) = \int_{IR^N} \frac{g(x, y, u(y))}{|y - x|^{\sigma}} dy, \quad \forall x \in IR^N, \qquad (*)$$

where σ is a given positive constant and the given function $g(x, y, u)$ is continuous and $g(x, y, u) \geq M \dfrac{|y|^{\beta} u^{\alpha}}{(1+|x|)^{\gamma}}, \forall x, y \in IR^N, \forall u \geq 0,$ with some constants $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ and $M > 0$. By proving elementarily, we prove that if $0 \leq \alpha \leq (\beta + N)/(\sigma + \gamma)$, $0 < \sigma < \min\{N, N + \beta - \gamma\}$, $N \geq 2$ the nonlinear integral equation (*) has no positive solution.