LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN CỦA KHÁI NIỆM TIẾP TUYẾN

LÊ VĂN TIẾN [*], TRẦN VŨ ĐỨC

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nghiên cứu khoa học luận lịch sử về các đối tượng toán học đóng một vai trò quan trọng trong dạy học Toán. Nó là cơ sở cho việc soạn thảo chương trình, sách giáo khoa và việc xây dựng các tình huống dạy học.

Trong phạm vi bài viết này, chúng tôi trình bày tóm tắt một vài kết quả của phân tích lịch sử hình thành và phát triển của khái niệm tiếp tuyến (TT). Từ đó rút ra một số đặc trưng khoa học luận và sư phạm về đối tượng này. Cụ thể, chúng tôi nghiên cứu xem trong lịch sử, khái niệm TT đã nảy sinh và phát triển như thế nào? Nó có những đặc trưng gì? Có những quan niệm khác nhau nào về TT đã xuất hiện? Các quan niệm này tiến triển ra sao qua các thời kì lịch sử?

2. LỊCH SỬ HÌNH THÀNH VÀ PHÁT TRIỂN CỦA KHÁI NIỆM TIẾP TUYẾN

Khái niệm TT xuất hiện rất sớm trong lịch sử phát triển của Toán học và trải qua một quá trình phát triển khá lâu dài. Nó là đối tượng lôi cuốn sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học và có mối quan hệ mật thiết với nhiều khái niệm Toán học khác. Sau đây là những giai đoạn chính của quá trình phát triển này.

2.1. Trước công nguyên

Khoảng 300 năm trước công nguyên, trong tác phẩm "Cơ bản" của Euclide người ta tìm thấy định nghĩa *TT của một đường tròn* như sau:

Một đường thẳng "chạm" vào một đường tròn và khi được kéo dài ra mà không cắt đường tròn đó thì gọi là tiếp xúc với đường tròn đó.

TT tại một điểm của đường tròn được xác định bằng cách dựng đường thẳng qua tiếp điểm và vuông góc với bán kính.

---

[*] Tiến sĩ Trường Đại học Sư phạm Tp.HCM.

Còn Archimède (287-212- TCN), khi nghiên cứu về các đường xoắn ốc thì định nghĩa:

Đường thẳng tiếp xúc với đường xoắn ốc khi nó chỉ giao với đường xoắn ốc tại 1 điểm mà không "đi qua phía bên kia" của đường xoắn ốc.

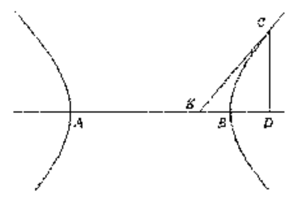
Appolonius thì quan niệm:

Tiếp tuyến của một conic là đường thẳng sao cho không một đường thẳng nào khác có thể "rơi" vào giữa nó và đường conic.

Sau đó, dựa vào đặc trưng của từng đường conic, ông trình bày các mệnh đề cho phép xác định TT (có chứng minh). Việc xác định TT được qui về các bài toán dựng hình.

Ví dụ: TT của hyperbol có thể dựng nhờ vào mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 34: *Xét hyperbol có đường kính AB. C là một điểm trên hyperbol. Trên đường thẳng chứa đường kính AB lấy điểm E sao cho* $\frac{BD}{DA}=\frac{BE}{EA}$. *Khi đó EC là tiếp tuyến của hyperbol tại C.*



Thực tế cho thấy, ngoài đường tròn và các đường conic, ngày càng xuất hiện nhiều loại đường cong khác nữa. Nhưng cách dựng TT lại thay đổi theo mỗi đường cong khác nhau. Điều đó đặt ra cho các nhà toán học vấn đề tìm một phương pháp tổng quát để có thể dựng được TT của một đường cong bất kì. Trong vòng 19 thế kỉ sau đó, vẫn chưa có một phương pháp tổng quát nào được đưa ra.

2.2. Nửa đầu thế kỉ XVII

Một loạt các phương pháp xác định TT của đường cong ra đời. Tiêu biểu là các phương pháp của Descartes (1596-1650), Roberval (1602-1675), Fermat (1601-1665) và Barrow (1630-1677).

❖ **Phương pháp của Descartes**

Descartes quan niệm *TT tại một điểm của đường cong là TT của đường tròn tiếp xúc với đường cong tại điểm đó*. Do đó, việc xác định TT của một đường cong được qui về việc xác định TT của một đường tròn mà ta đã biết. Vấn đề là làm thế nào xác định được đường tròn tiếp xúc đó?

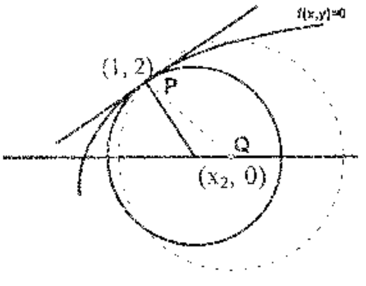
Lưu ý rằng Descartes là một trong những người đầu tiên đưa ra ý tưởng sử dụng phương trình đại số để miêu tả các đường cong. Từ đó, để xác định đường tròn tiếp xúc, Descartes viết phương trình hoành độ giao điểm của đường tròn và đường cong, rồi tìm điều kiện để phương trình này có nghiệm kép.

Ví dụ: Giả sử muốn dựng TT của parabol $y^2 = 4x$ tại điểm P(1,2).

Phương trình đường tròn tâm Q(x_2,0) đi qua P(1,2) là $(x-x_2)^2 + y^2 = (1-x_2)^2 + 4$.

Thay $y^2 = 4x$, ta được : $(x-x_2)^2 + 4x = (1-x_2)^2 + 4$

hay $x^2 + 2x(2-x_2) + (2x_2 - 5) = 0$



Phương trình này có nghiệm kép khi $(2-x_2)^2 - (2x_2 - 5) = 0$ hay $x_2 = 3$.

Đường tròn có tâm (3,0) và đi qua điểm (1,2) của đường cong có thể vẽ được, từ đó dựng được TT cần tìm.

Do dùng tọa độ để miêu tả các đường cong, nên về mặt lý thuyết, phương pháp của Descartes có thể áp dụng cho mọi loại đường cong. Tuy nhiên trên thực tế, phương pháp này không thể áp dụng cho nhiều đường cong khác do tính phức tạp của phương trình đạt được.

❖ **Phương pháp của Roberval**

Với quan điểm xem các đường cong như là quĩ đạo của một điểm đang chuyển động liên tục, Roberval đưa ra định nghĩa sau đây cùng phương pháp xác định TT.

Phương chuyển động của điểm vạch nên đường cong là TT của đường cong tại mỗi vị trí của điểm đó.

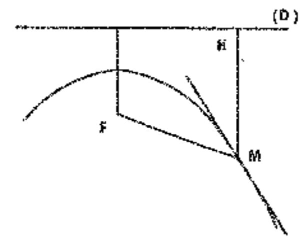
Phương pháp xác định TT:

Bằng những tính chất đặc trưng của đường cong (đã cho trước), xác định những chuyển động khác nhau của điểm vạch nên đường cong đó tại nơi mà ta muốn vẽ tiếp tuyến. Sau khi hợp tất cả các chuyển động này thành một chuyển động duy nhất, xác định phương của chuyển động hợp, ta sẽ được TT của đường cong.

Áp dụng phương pháp này, Roberval đã xác định được tiếp tuyến của 13 loại đường cong khác nhau (conic, xoắn ốc, xycloic, ...).

Ví dụ: Xác định TT của parabol.

Ông định nghĩa parabol là quĩ đạo của những điểm M cách đều một điểm F và một đường thẳng (D) cho trước. F gọi là tiêu điểm, (D) gọi là đường chuẩn của parabol.



Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống (D), ta luôn có MF = MH.

Chuyển động của điểm M vì thế được coi như hợp thành từ hai chuyển động: một trên đường thẳng HM, một trên đường thẳng FM. Khi điểm M di chuyển trên đường cong thì HM và FM cùng tăng (hoặc cùng giảm) một lượng như nhau.

Do đó chuyển động của điểm vạch nên đường cong parabol là hợp của "hai chuyển động thẳng bằng nhau". Vì vậy, theo qui tắc hình bình hành, phương của chuyển động hợp là phương của đường chéo hình thoi có hai cạnh kề là MF và MH, tức phân giác của góc $\widehat{FMH}$ là TT tại điểm M của parabol.

Tuy nhiên, trên thực tế, việc xác định các chuyển động thành phần là không hề dễ dàng đối với những đường cong có tính chất phức tạp. Vì vậy phương pháp của Roberval vẫn không được xem là một phương pháp mang tính tổng quát.

Sau đây là hai phương pháp tìm tiếp tuyến của Fermat và Barrow mà về quan niệm và ý tưởng là hoàn toàn khác với các phương pháp trước đó. Cả hai phương pháp đều sử dụng đến các đại lượng vô cùng nhỏ và chúng được xem như là tiền thân của phép tính vi phân.

❖ **Phương pháp của Fermat**

Đầu tiên, qua một bài toán, Fermat đưa ra một quy tắc tìm các giá trị lớn nhất và bé nhất. Sau đó, ông khẳng định từ quy tắc này có thể giải quyết bài toán tìm TT của một đường cong bất kì. Quy tắc này có thể được tóm tắt như sau:

Để tìm giá trị A, mà tại đó biểu thức $f(A)$ có giá trị lớn nhất hay bé nhất, trước tiên Fermat viết các biểu thức "gần đúng"

$$f(A+E)=f(A) \quad hay \quad f(A+E)-f(A)=0.$$

Chia cho E ta được: $\frac{f(A+E)-f(A)}{E}=0$.

Trong đẳng thức cuối cùng ông bỏ đi những số hạng còn chứa E, tức là đặt $E=0$ (tương đương với việc chuyển qua giới hạn khi $E \to 0$). Khi đó sẽ được đẳng thức "đúng":

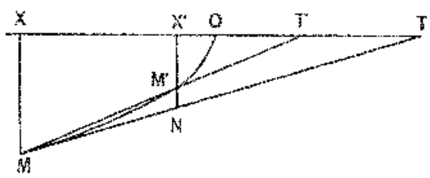
$$\left[\frac{f(A+E)-f(A)}{E}\right]_{E=0}=0.$$

Từ đây xác định được giá trị cần tìm A.

Ở phương pháp trên, E đóng vai trò số gia vô cùng bé. Đẳng thức xuất phát $f(A+E)=f(A)$ biểu thị nguyên lí: Tại thời điểm mà đại lượng đạt giá trị lớn nhất hay bé nhất, lượng đó hầu như dừng lại trong quá trình biến thiên.

Áp dụng quy tắc này, Fermat đưa ra ví dụ về tìm TT tại điểm M của parabol $\frac{x}{y^2}=C$ như sau:

Gọi O là đỉnh của parabol, M' là điểm khác M nằm trên parabol. X, X' lần lượt là hình chiếu của M, M' xuống trục của parabol.



Giả sử TT tại điểm M mà ta cần xác định cắt trục parabol tại T. Cát tuyến MM' cắt trục parabol tại T'. X'M' cắt tiếp tuyến MT tại N. Để xác định tiếp tuyến MT, Fermat tìm đoạn thẳng TX.

Do $\triangle$TXM và $\triangle$TX'N đồng dạng và bất đẳng thức X'M'<X'N, từ phương trình của parabol suy ra:

$$\frac{OX}{OX'}=\frac{XM^2}{X'M'^2}>\frac{XM^2}{X'N^2}=\frac{TX^2}{TX'^2} \quad (1)$$

Đặt $OX = x;\ OX' = x-h;\ Tx = t;\ TX' = t-h$

Khi h khá nhỏ (tức M' dần đến M, X'M' gần bằng X'N) , từ (1) Fermat viết biểu thức "gần đúng" : $\frac{x}{x-h}=\frac{t^2}{(t-h)^2}$ hay $-2xth+xh^2=-t^2h$

Chia biểu thức cho h, ta được : $2xt-xh=t^2$

Bỏ đi những số hạng còn chứa h, tức là đặt $h=0$, ta được đẳng thức đúng:

$$2xt=t^2 \quad hay \quad t=2x$$

Như vậy là ta đã xác định được TT của parabol tại điểm M.

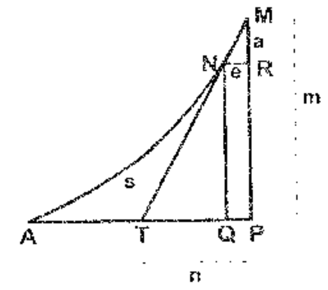
Rõ ràng Fermat đã xem ***TT của đường cong như là vị trí giới hạn của cát tuyến.*** Tức là, khi M' dần đến vị trí của M thì cát tuyến MT' dần đến vị trí của tiếp tuyến MT. Tuy nhiên phương pháp của Fermat vẫn có một hạn chế lớn. Đó là quy tắc mà ông đưa ra "không có một cơ sở nào", tức chưa có một cơ sở lý thuyết nào để chứng minh được tính đúng đắn của quy tắc đó.

❖ **Phương pháp của Barrow**

Phương pháp này về bản chất là giống phương pháp trên của Fermat, chỉ khác về cách diễn đạt. Có thể diễn tả lập luận của Barrow như sau:

Giả sử ta có đường cong s. Đường thẳng nằm ngang AP cắt đường cong tại A , đường thẳng đứng PM cắt đường cong tại M .

Giả sử MT là tiếp tuyến cần xác định của đường cong tại M, cắt AP tại T



Xét cung MN vô cùng nhỏ là phần trùng nhau của đường thẳng MT và đường cong s. Vẽ NQ // MP, NR // AP .

Đặt MP = m; PT = t; MR = a; NR = e

Để xác định tiếp tuyến MT ta cần tính lượng PT = t.

Vì M, N cùng nằm trên đường cong nên cùng nghiệm đúng tính chất đặc trưng của đường cong đó. Từ tính chất này, ta tìm được mối liên hệ giữa các đại lượng a, e và m qua một đẳng thức I nào đó. Trong đẳng thức này, ta sẽ bỏ đi các số hạng có dạng là lũy thừa của a và e (các số hạng này được xem như có giá trị không đáng kể hay vô cùng bé trong phép tính). Dựa vào định lí Thales ta có $\frac{a}{m} = \frac{e}{t}$.

Thay vào I, ta sẽ tính được t. Như vậy tiếp tuyến MT hoàn toàn được xác định.

Như vậy, phương pháp của Barrow dựa vào ý tưởng ***xem TT tại một điểm của đường cong như là đường thẳng trùng với một phần vô cùng nhỏ của đường cong tại điểm đó***. Nói cách khác, theo ngôn ngữ hiện đại, ***trong lân cận của tiếp điểm, có thể "xấp xỉ" đường cong bởi TT tại điểm đó***.

Cũng như phương pháp của Fermat, phương pháp này là chưa có cơ sở lý thuyết rõ ràng.

2.3. Nửa cuối thế kỉ XVII đến nay

Nếu phương pháp của Fermat và Barrow chưa có cơ sở rõ ràng thì nay được Newton và Leibnitz tổng hợp và hoàn thiện hơn bằng cách đưa vào các khái niệm đạo hàm và vi phân.

• **Ở Newton**, vận tốc là một khái niệm cơ bản và qua nó đạo hàm được định nghĩa là vận tốc tăng hay giảm của các lượng biến thiên theo thời gian. Newton kí hiệu đạo hàm của các lượng biến thiên $u, y, z, x, \ldots$ cũng là những chữ cái đó nhưng thêm dấu chấm như $\dot{u}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{x}, \ldots$

Sau đó ông nêu lên qui tắc (có chứng minh) để xác định hệ thức giữa các đạo hàm nếu biết được hệ thức đã cho giữa các lượng biến thiên. Tức là, nếu cho biểu thức liên hệ giữa hai lượng biến thiên là y và x, ta có thể xác định được hệ thức liên hệ giữa các đạo hàm $\dot{y}, \dot{x}$. (Qui tắc này về bản chất là giống qui tắc mà Fermat đã đưa ra).

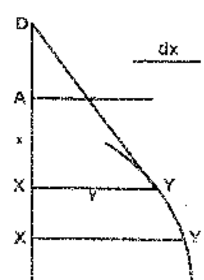
Liên hệ với bài toán dựng TT, khi cho trực tiếp phương trình giữa các tọa độ đềcac x, y của điểm biến thiên của đường cong. Newton lí luận như Barrow và tính được tỉ số $PM : TP = \dot{y} : \dot{x}$

Trong đó, tỉ số của các đạo hàm được xác định theo qui tắc mà Newton đã nêu.

Ngày nay, phương pháp của Fermat được hiểu là **dùng đạo hàm để tính hệ số góc của tiếp tuyến.**

• **Với Leibnitz** khái niệm đầu tiên là TT.

Giả sử YY là đường cong tùy ý, Y là điểm biến thiên trên đó với hoành độ AX = x và tung độ YX = y.



Leibnitz kí hiệu dx đơn giản là đoạn thẳng được lấy tùy ý. Nếu YD là TT với đường cong tại điểm Y thì đoạn thẳng mà tỉ lệ với dx cũng như là tung độ y tỉ lệ với XD (tiếp ảnh), được gọi là dy.

Sau đó, ông đưa ra các qui tắc lấy vi phân của hằng số, tổng, hiệu, tích, thương, căn số. Căn cứ vào phương trình đường cong, bằng các qui tắc đó, ông tính được tỉ số $\frac{dy}{dx}$, từ đó xác định được XD, tức tìm được TT.

Việc đưa vào các khái niệm vi phân, đạo hàm cùng với các qui tắc tính đã giúp cho việc xác định TT của các đường cong trở nên dễ dàng hơn nhiều. Đến đây, bài toán xác định TT của đường cong tổng quát xem như được giải quyết.

Ngày nay, để thuận tiện cho việc nghiên cứu và giảng dạy, xuất hiện nhiều định nghĩa khác nhau về TT của một đường cong tổng quát. Nhưng các định nghĩa này thường được xây dựng theo một trong hai quan điểm: hoặc xem tiếp tuyến như vị trí giới hạn của cát tuyến, hoặc xem TT như đường thẳng xấp xỉ với đường cong trong lân cận tiếp điểm.

3. MỘT VÀI KẾT LUẬN VỀ PHƯƠNG DIỆN KHOA HỌC LUẬN VÀ SƯ PHẠM

TT là đối tượng nghiên cứu của nhiều lĩnh vực khác nhau như Hình sơ cấp, Hình giải tích, Giải tích, Vật lí.

• Khái niệm TT xuất hiện và được nghiên cứu trước hết trong phạm vi hình học sơ cấp với các đặc trưng: có duy nhất một điểm chung, tiếp xúc với đường cong. Nó được định nghĩa theo lối mô tả, sử dụng các thuật ngữ mơ hồ như "*chạm*", "*đi qua phía bên kia*", "*rơi*, ...Các định nghĩa mô tả này không cho phép đưa ra một phương pháp tổng quát để xác định TT.

Cách dựng tiếp tuyến đều được trình bày thông qua việc dựng hình và phụ thuộc nhiều vào hình vẽ, tính chất của đường cong. Việc xem TT là đối tượng của hình sơ cấp chỉ cho phép nghiên cứu TT ở một số hình hình học đơn giản.

• Khi TT là đối tượng của hình học giải tích, do chưa thoát khỏi ảnh hưởng của hình học sơ cấp nên các tính chất của tiếp tuyến không được mở rộng, trong khi phương pháp bị hạn chế bởi tính phức tạp của phép tính đại số. Rõ ràng quan niệm về TT của Descartes vẫn chịu ảnh hưởng từ quan niệm của Euclide. Việc đồng nhất quan hệ tiếp xúc với điều kiện để phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm kép không cho phép Descartes đi xa hơn trong việc giải quyết bài toán về TT.

• TT theo quan niệm động học chỉ có ý nghĩa về mặt lịch sử vì đã đề cập đến ý tưởng về phương tức thời của chuyển động, tức là về vấn đề giới hạn, vấn đề đánh dấu sự phát triển của phạm vi giải tích. Phương pháp này cũng không giải quyết được một cách triệt để bài toán tìm TT.

• Khi TT là đối tượng của giải tích: việc sử dụng các đại lượng vô cùng nhỏ để giải quyết bài toán tiếp tuyến đã mở ra con đường phát triển cho giải tích toán học. Bài toán TT đã được giải quyết nhờ vào các khái niệm đạo hàm và vi phân. Các tư tưởng quan trọng nhất thể hiện trong phương pháp tìm TT là:

- Tiếp tuyến là vị trí giới hạn của cát tuyến.

- Tiếp tuyến của đường cong tại một điểm là đường thẳng"xấp xỉ" tốt nhất với đường cong trong lân cận của điểm đó.

Tư tưởng này đã thể hiện bản chất của kĩ thuật giải tích (khác với kĩ thuật đại số). Đó là kĩ thuật xấp xỉ.

Bằng phương pháp giải tích, TT được mở rộng cho nhiều loại đường cong khác nhau, nhiều tính chất của tiếp tuyến cũng được nghiên cứu sâu hơn. Chẳng hạn, đặc trưng xấp xỉ của khái niệm tiếp tuyến sau này được Newton nghiên cứu và ứng dụng trong việc tính xấp xỉ giá trị của hàm số.

Những yếu tố khoa học luận nêu trên gợi ra những ý tưởng về cách tổ chức tiến trình đưa khái niệm TT vào dạy học toán xuyên suốt từ THCS đến THPT. Đặc biệt, để hiểu đầy đủ nghĩa của khái niệm TT đòi hỏi cần có những kiến thức cũng như cách tư duy mang bản chất của giải tích (tham khảo [4]). Điều này dẫn tới việc tiếp cận khái niệm TT nên tính đến cả hai quan niệm: TT như vị trí giới hạn của cát tuyến và TT như là đường thẳng xấp xỉ tốt nhất đường cong trong lân cận của tiếp điểm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Fichtengôn.G.M (1977), *Cơ sở giải tích toán học* tập 1, NXB ĐH và THCN.

[2]. Francois de Gandt (1980), *De la vitesse de Galilée aux Fluxions de Newton - Mathématiques et réalités physique au XVIIe siècle*, Epistémologie et Histoire dé Mathématiques – Project IREM France. Berkeley, California, Etats-Unis.

[3]. Howard Eves (1993). *Giới thiệu lịch sử Toán học*, NXB Khoa học và kĩ thuật.

[4]. Lê Văn Tiến (2000). Các *quan điểm khác nhau về giảng dạy Giải tích ở trường phổ thông*. NCGD số chuyên đề quý 1/2000 và số 3/2000.

[5]. Perrin Patrick (1992). *Prenons la tangente avant de dériver*, Histoire d'infini, commission Inter-IREM.

[6]. Robert.Maynard Hutchins (1952). *On conics*, in Great Books of the Western World, vol.2, ed., Encyclopedia Britannica.

[7]. Trần Vũ Đức (2004). *Khái niệm tiếp tuyến – Một nghiên cứu khoa học luận và sư phạm*, Luận văn tốt nghiệp ĐHSP, Người hướng dẫn: TS.Lê Văn Tiến.

[8]. Văn Như Cương (1977). *Lịch sử hình học*, NXBGD.

Abstract:

History of formation and development of the concept of tangent

The study of historic epistomology on mathematic objects has an important role in teaching mathematics. It is the basis of the curriculum development and text-book compilation and of the contruction of teaching situations.

In this paper, we present some results gotten from the historic analysis of the formation and the development of the concept of tangent, hereby, we draw some characteristics in aspect of epistomology and pedagogy. Specifically, we study how the concept of tangent appeared and grew in the history. What its characteristics are there were any other concepts of tangent. How these concepts evolved in history.