ENTROPY TRONG TOÁN HỌC VÀ TRONG VẬT LÍ

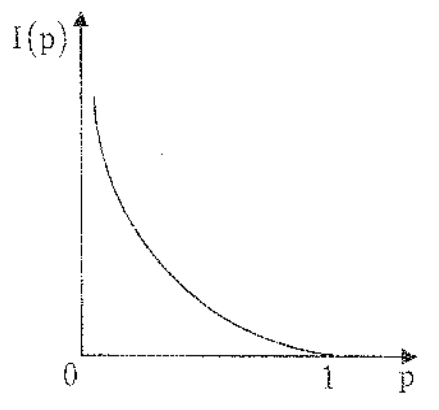
LÊ NAM*

1. Entropy và thông tin

Ta sẽ xây dựng hàm $I(p)$ thoả mãn các điều kiện được mô tả ở hình 1. Thông tin chứa đựng trong thông báo sẽ bằng zero nếu như sự kiện tương ứng đã hoàn thành. Ví dụ : khi người ta báo cáo mặt trời đã lặn vào hôm qua thì thông tin của sự kiện này bằng zero. Khi đó ta cho $I(p)=0$. Ngược lại, thông tin chứa đựng nhiều hơn khi các sự kiện có khả năng xảy ra không được biết trước. Nói các khác $I(p)$ sẽ tăng khi p giảm như mô tả trên đồ thị. Ta nhận thấy hàm :

$$I(p) = -k\log p \tag{1}$$

thoả mãn yêu cầu của ta với k là hằng số dương. Người ta hay chọn $k = 1$ hoặc bằng hằng số Boltzmann còn logarit lấy theo cơ số 2 hoặc cơ số e.



Hình 1. Đồ thị nói lên sự phụ thuộc của thông tin $I(p)$ vào xác suất ngẫu nhiên p.

Ta nhận thấy khi $p=1$ ta có $I(1)=0$, khi $p=0$ ta có $I(0)=\infty$.

Bây giờ ta xét tập các sự kiện $A_1, A_2, ..., A_n$ ứng với sác xuất xảy ra ngẫu nhiên $p_1, p_2, ..., p_n$ (a priori probabilities). Khi sự kiện A_i thực sự xảy ra với xác

---

* Cử nhân, Khoa Vật lí, Trường ĐHSP Tp.HCM.

suất p_i thì thông tin có được sẽ là $I(p_i)$. Vậy thông tin trung bình của tất cả các sự kiện trên sẽ là :

$$\bar{I} = \sum_{i}^{n} p_i I(p_i) = -k\sum_{i} p_i \log p_i \qquad (2)$$

Ví dụ ta tung đồng xu thì mặt sấp và mặt ngửa sẽ có xác suất bằng nhau và bằng 1/2. Khi đó thông tin khi chọn $k = 1$ sẽ là :

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log_2 2 = 1\text{ bit}$$

do chọn logarit cơ số 2 nên ta có 1 bit[1] thông tin.

Hoặc ta có một hệ chỉ có 2 trạng thái độc lập nhau với xác suất bằng nhau. Ta nói hệ có 1 bit thông tin. Như vậy, 1 bit thông tin là khả năng giải quyết độ không chắc chắn đối với 2 sự kiện có xác suất bằng nhau.

Một ứng dụng của lí thuyết thông tin đơn giản trên là hệ đếm nhị phân. Chỉ với câu trả lời "có" và "không" hay 1 và 0 ta có thể mô tả đầy đủ số nguyên bất kì từ tập (0, 1, 2, ..., 9) của hệ đếm thập phân. Do xác suất xuất hiện ngẫu nhiên của một trong mười chữ số trên là như nhau và đều bằng 1/10 nên khi chọn $k = 1$ ta có :

$$I\left(\frac{1}{10}\right) = -\log\frac{1}{10} = \log_2 10 = 3.32\text{ bit}$$

Từ kết quả trên ta thấy nếu hỏi 3 lần thì sẽ không đủ nhưng với 4 câu hỏi "có" hoặc "không" sẽ mô tả chính xác các số của hệ thập phân. Như vậy, hệ nhị phân cần 4 câu hỏi hay cần 4 cột chữ số :

Hệ thập phân	Hệ nhị phân			
0	0	0	0	0
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	1	1	0	0

[1] Từ bit là viết tắt của binary digit

Hệ thập phân	Hệ nhị phân			
4	0	0	1	0
5	1	0	1	0
6	0	1	1	0
7	1	1	1	0
8	0	0	0	1
9	1	0	0	1

Bây giờ ta chọn k bằng hằng số Boltzmann và áp dụng công thức chuyển logarit cơ số 2 sang cơ số e thì biểu thức (2) sẽ có dạng :

$$I(p_1, p_2, ...) = -\frac{k_B}{\ln 2}\sum_i p_i \ln p_i = \frac{S}{\ln 2} \tag{3}$$

ở đây

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \tag{4}$$

Ta thấy (4) là công thức tính Entropy của hệ trong tập hợp chính tắc. Nó xuất hiện trong tất cả các giáo trình *Vật lí Thống kê* dành cho sinh viên khoa Vật lí.

Công thức (3) được nhà toán học Mỹ Claude Shannon tìm ra lần đầu tiên vào năm 1948 và ông cũng là người đặt nền móng cho lí thuyết thông tin. Từ hai công thức trên ta đi tới kết luận quan trọng : lượng thông tin chứa trong hệ (hoặc tập các sự kiện) tỉ lệ với Entropy. Thông thường người ta đồng nhất Entropy với lượng thông tin chứa trong hệ.

2. Entropy và độ mất trật tự

Khái niệm trật tự (order) hay ngược nghĩa với nó là mất trật tự (disorder) có định tính như nhau. Một bức tường gạch rõ ràng là trật tự hơn một đống gạch. Một loạt các bức thư được phân thành nhóm theo thứ tự chữa cái giống như trong từ điển sẽ trật tự hơn rất nhiều nếu phân theo các chữ cái do một con khỉ nghịch trên bàn phím tạo ra.

Trong cơ học thống kê ta quan tâm tới độ mất trật tự trong sự phân bố của hệ theo các trạng thái vi mô cho phép. Để làm rõ vấn đề trên ta xét ví dụ sau :

Giả sử đứa bé được dặn ở nhà chờ bố mẹ đi làm về và nó có thể vào bất cứ phòng nào trong căn nhà nó muốn. Rõ ràng đứa trẻ sẽ không ngồi chờ trong một phòng. Nó sẽ đi lang thang không nghỉ từ phòng này sang phòng kia với tỉ lệ p_i đối với phòng thứ i (a fraction of time p_i in the i-room). Ta cần xác định số đo định lượng của sự mất trật tự trên theo sự phân bố của các p_i đã cho. Trước khi đo độ mất trật tự ta cần thêm một số yêu cầu định tính sau :

a. Việc đo độ mất trật tự được xác định thông qua tập $\{p_i\}$.

b. Do $\sum_i p_i = 1$ nên nếu như một trong số các p_i bằng đơn vị (tất cả các p_i còn lại bằng zero hết) thì hệ sẽ hoàn toàn trật tự. Số đo định lượng độ mất trật tự lúc này phải bằng zero.

c. Với W cố định độ mất trật tự cực đại sẽ ứng với trường hợp khi các $p_i = \frac{1}{W}$ với $i = 1, 2, ..., W$. Điều này có nghĩa là đứa bé sẽ đi lang thang vào các phòng một cách hoàn toàn ngẫu nhiên. Nó không hề ưu tiên cho bất kì phòng nào trong nhà.

d. Độ mất trật tự tăng nếu W tăng. Nhà càng lớn càng nhiều phòng thì độ mất trật tự càng lớn.

e. Giả sử khi đứa bé lang thang ở lầu 1, ta tính được độ mất trật tự $D(1)$ của sự phân bố của nó theo tất cả các phòng của lầu 1. Tương tự ta có $D(2)$ cho lầu 2. Khi đó, tổng số độ mất trật tự khi ta gộp cả lầu 1 và lầu 2 lại mới nhau là :

$$(\text{Độ mất trật tự lầu 1 và lầu 2}) = D(1) + D(2)$$

Từ tất cả các yêu cầu trên nhà toán học Nga A. Khinchin đã chứng minh được :

$$\text{Độ mất trật tự của hệ} = -k\sum_i p_i \ln p_i \qquad (5)$$

k hằng số dương có thể chọn bằng 1 hoặc bằng hằng số Boltzmann.

Khi ta chọn $k = k_B$ thì công thức (5) chính là công thức tính Entropy trong vật lí thống kê. Ta có thể phát biểu ý nghĩa của Entropy như sau :

Entropy là số đo định lượng độ mất trật tự của hệ.

Entropy cũng là số đo thông tin chứa trong hệ do hệ càng hỗn loạn thì càng chứa nhiều thông tin và rõ ràng để xây dựng lại một hệ giống y như vậy cần rất nhiều qui tắc, luật lệ, thông số trong khi để xây dựng lại một hệ có tính trật tự cao cần ít thông tin hơn. Hệ có tính trật tự cao sẽ có Entropy nhỏ. Ngược lại, hệ có độ mất trật tự cao sẽ có Entropy lớn hơn.

Entropy ↔ thông tin chứa trong hệ

Entropy ↔ độ mất trật tự của hệ.

3. Entropy và sự mất thông tin

Trong phần này, ta sẽ xem xét vấn đề vừa nêu dưới một góc độ khác. Như đã biết ở phần hai khi hệ có tính trật tự cao thì thông tin chứa trong hệ ít. Trong khi hệ có độ mất trật tự cao thì thông tin chứa trong hệ lớn nhưng thông tin mà ta nhận được lại ít. Ví dụ : với hệ khí tại trạng thái cân bằng nhiệt ta đo được nhiệt độ, thể tích, mật độ, áp suất, nghĩa là chỉ với vài thông số. Như vậy, thông tin về hệ mà ta nắm được rất ít. Trong khi đó, với mạng tinh thể do có cấu trúc cao hơn hệ khí nên ta đo được nhiều thông số hơn để mô tả mạng tinh thể. Ngoài những thông số vừa nêu ở trên ta còn biết thêm sự sắp xếp các nguyên tử trong mạng, khoảng cách giữa chúng, độ pha tạp giữa chúng, ...Tóm lại, hệ có Entropy thấp sẽ cho ta nhiều thông tin hơn. Từ đây ta đi tới khái niệm mất thông tin[1].

Entropy tăng sẽ làm thông tin chứa trong hệ tăng nhưng do vậy thông tin mà ta nắm được lại ít đi. Ta nói ta bị mất thông tin do có thêm một lượng thông tin tương ứng với độ tăng Entropy ẩn chứa trong hệ mà ta không có cách gì biết được. Khi mạng tinh thể bị nóng chảy rồi biến thành hơi thì toàn bộ thông tin về sự sắp xếp giữa các nguyên tử, khoảng cách giữa chúng, ... đã bị mất.

Entropy tăng ↔ thông tin ta nắm được giảm ↔ mất thông tin.

$$\Delta S = -\Delta I$$

[1] the information lost

Nhà Vật lí Mỹ Brillouin là người đầu tiên đề cập tới khái niệm mất thông tin trong bài báo đăng trong Tạp chí Vật lí ứng dụng năm 1951, số 22, tr.334 [1].

4. Entropy và mũi tên thời gian

Tất cả chúng ta đôi khi tự hỏi : thời gian là gì ? Nó bắt đầu như thế nào và dẫn đến đâu ? Mọi cố gắng để trả lời câu hỏi thời gian là gì đều thất bại và tất cả những gì ta có thể làm là tìm ra một mô hình toán học thật tốt về thời gian và nó có thể đưa ra được những tiên đoán phù hợp với thực nghiệm.

Theo Newton thời gian là tách biệt đối với không gian và được xem như một đường thẳng dài vô tận theo cả hai chiều. Thời gian được xem là vĩnh cửu theo nghĩa là đã tồn tại và sẽ tồn tại mãi mãi.

Theo Einstein thời gian và không gian kết chặt với nhau. Sự phân bố vật chất sẽ làm cong cả không gian lẫn thời gian. Như vậy, thời gian có hình dạng của nó. Lí thuyết của Einstein tiên đoán rằng vũ trụ và bản thân thời gian phải có điểm bắt đầu và kết thúc.

Mặc dù có sự khác biệt nhưng cả hai mô hình trên đều có chung một điểm là thời gian chỉ trôi theo một chiều. Một trong những điều kì lạ trong thế giới ta đang sống là Entropy tăng, độ mất trật tự tăng trong khi thời gian tiếp tục trôi và không có cách gì quay ngược thời gian lại. Từ đây, ta có thể định nghĩa hướng của thời gian như sau : chiều dương của thời gian sẽ là hướng mà trong đó Entropy của hệ nhiệt động cô lập tăng. Như vậy, việc Entropy luôn tăng đã quyết định mũi tên thời gian (arrow of time) chỉ hướng theo một chiều và không bao giờ đảo ngược lại được.

Ta có tờ báo và không khí trong phòng. Chúng sẽ có ít Entropy hơn là sau khi đốt tờ báo cho ta CO_2, tro, ít hơi nước và phần không khí còn lại. Quá trình trên xảy ra theo chiều dương của thời gian. Ta không thể quay ngược theo trục thời gian được bởi nếu làm được điều đó có nghĩa là ta có thể tạo ra quá trình làm giảm Entropy, một điều trái với qui luật tự nhiên.

Ta có thể chế tạo tờ báo từ CO_2, tro, không khí nhưng khi đó ta lại làm Entropy của môi trường xung quanh thay đổi và kết quả là Entropy luôn tăng.

[1] Journal of Applied Physics, Vol.22, 3, (1951).

5. Kết luận

Khái niệm Entropy lần đầu tiên được nhà vật lí Đức R. Clausius (1822 – 1888) đưa ra khi ông nghiên cứu về tính chất động học của chất khí. Ông đưa ra đại lượng Entropy[1] của hệ như là nhiệt năng mà hệ hấp thụ chia cho nhiệt độ của hệ thông qua công thức :

$$\frac{\delta Q}{T} = dS.$$

Khi hệ thực hiện một quá trình nào đó mà không có sự trao đổi nhiệt thì Entropy của hệ khí sẽ không thay đổi. Tuy nhiên, do nhiệt chỉ truyền từ nơi có nhiệt độ cao tới nơi có nhiệt độ thấp hơn nên Clausius đã chứng minh được rằng tổng số thay đổi Entropy luôn dương.

Nhà vật lí xuất sắc người Áo Boltzmann (1844 – 1906) đã chỉ ra rằng ta có thể tính Entropy bằng cách tính số các cách khác nhau mà phân tử khí có thể phân bố trong khi không làm thay đổi trạng thái vĩ mô của hệ như : áp suất, nhiệt độ, mật độ. Con số đó rất lớn và nó được biểu thị qua công thức mang tên ông :

$$S = k_B \ln W$$

W : tổng số cách mà các hạt trong hệ có thể phân bố mà không làm thay đổi đặc tính vĩ mô của hệ, hay nói cách khác, W là tổng số các trạng thái vi mô ứng với một trạng thái vĩ mô đã cho của hệ.

k_B : hằng số Boltzmann.

Tiếp theo Boltzmann, nhà toán học Mĩ Shannon đã đồng nhất Entropy của hệ với lượng thông tin chứa trong hệ. Ông đã tìm ra công thức tính lượng thông tin chứa trong hệ mà thực chất nó dẫn tới công thức của Boltzmann :

$$I = -k_B \sum p_i \log p_i = \frac{S}{\ln 2}$$

Cùng với nhiều nhà toán học khác, nhà toán học Nga A. Khinchin đã nghiên cứu sự liên quan của độ mất trật tự với thông tin và Entropy. Ông chứng

[1] Để mô tả dòng nhiệt, ông định nghĩa sự thay đổi Entropy.

minh rằng ta có thể đồng nhất độ mất trật tự của hệ với Entropy của hệ thông qua công thức Shannon :

$$\text{Độ mất trật tự} = -k\sum p_i \ln p_i$$

Cùng thời với Khinchin và Shannon, nhà vật lí Mĩ Brillouin đưa ra khái niệm mất thông tin mà thực chất là nhìn nhận vấn đề mà Shannon đặt ra dưới một góc độ khác. Khi Entropy của hệ tăng ta đã mất một lượng thông tin do lượng thông tin này đã được hệ tiếp nhận và chứa trong nó.

Khái niệm mất thông tin do Brillouin đề ra có ý nghĩa rất quan trọng khi ta đề cập tới Entropy của lỗ đen. Về vấn đề rất thú vị này xin hẹn vào bài báo sau.

Lời cảm ơn :

Tác giả xin cảm ơn Giáo sư J. Bekenstein thuộc trường tổng hợp Jerusalem, Giáo sư Paul. Tod thuộc trường Oxford và Giáo sư R. Wald thuộc trường tổng hợp Chicago đã giúp đỡ rất nhiều trong việc tìm kiếm tài liệu.

Tác giả xin cảm ơn Trường ĐHSP Tp.HCM đã tài trợ cho bài báo này thông qua đề tài CS.2005.23.96.

Tài liệu tham khảo

[1]. J. Bekenstein (2001), *Limits of Information*, gr – qc/0009061

[2]. E. Jayners (1957), *Information Theory and Statistical Mechanics*, Phys. Rev. Vol 108 (2), p.171 – 190.

[3]. A. Khinchin (1957), Mathematical Foundations of Information Theory, Dover Inc, New York, p.2 – 18.

[4]. P. Landsberg (1990), Statistics Mechanics, Dover Inc, New York, p.360 – 367.

[5]. P. Mitra (1996), Black Hole Entropy, hep-th/9603180.

[6]. T. Jacobson (2005), Black Hole Themeodynamics, Physics 776, Advanced Gravitation Theory, Lecture notes, University of Utrecht.

[7]. R. Wald (2002), The Themeodynamics of Black Holes, From Advances in Gravity Theory, Kluwer pub, Netherlands, p.21 – 29.

Tóm tắt:

Entropy trong Toán học và trong Vật lí

Bài báo này trình bày công thức tính "thông tin" trong một hệ theo quan điểm thống kê. Bài báo cũng nêu lên sự liên hệ giữa Entropy với thông tin, Entropy với độ mất trật tự.

Abstract:

Entropy in Mathematics and Physics

This article is about the fomula to calculate "information" in a system under the statistical viewpoint. The relation between Entropy and information and the one between Entropy and disorder.