# MỘT TIÊU CHUẨN HIỆU QUẢ VỀ TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN HÀM BẬC CAO

NGUYỄN ANH TUẤN [1]

Trong bài báo này tác giả sử dụng các kết quả trong [1] để đưa ra các tiêu chuẩn hiệu quả cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình vi phân hàm bậc cao.

Xét phương trình vi phân hàm bậc cao :

$$u^{(n)}(t) = f(u)(t) \tag{1}$$

với điều kiện biên dạng hàm :

$$\Phi_i\left(u^{(i-1)}\right) = \varphi_i(u) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Trong đó toán tử $f : C^{(n-1)}([a,b]) \to \mathrm{L}([\mathrm{a},\mathrm{b}])$ $(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$ thỏa mãn điều kiện Carathéodory.

Với mỗi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ phiếm hàm $\Phi_i$ trong (2) là tuyến tính, liên tục, không giảm trong không gian $C([a,b])$ và tập trung trong đoạn $[a_i, b_i] \in [a,b]$ (có nghĩa là giá trị của phiếm hàm $\Phi_i$ chỉ phụ thuộc vào hàm số thu hẹp đối với đoạn $[a_i, b_i]$ và đoạn này có thể suy biến thành một điểm).

Ta luôn có thể giả thiết $\Phi_i(1) = 1$. Trong điều kiện (2) các phiếm hàm $\Phi_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ là liên tục trong không gian $C^{n-1}([a,b])$.

Các trường hợp riêng của điều kiện biên (2) là :

Điều kiện biên dạng Cauchy-Nicoleti

$$u^{(i-1)}(t_i) = \varphi_i(u) \;\; (i = 1, 2, \ldots, n)$$

hay điều kiện biện dạng tuần hoàn

$$\lambda_i \dot{u}^{(i-1)}(\mathrm{a}) + \mu_i u^{(i-1)}(b) = 0 \;\; (\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$$

Cho $\tau$: $[\mathrm{a},\mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ ta định nghĩa toán tử $S_\tau$ như sau :

$$S_\tau(x)(t) = \begin{cases} x(\tau(t)) & \text{khi } \tau(\mathrm{t}) \in [\mathrm{a},\mathrm{b}] \\ 0 & \text{khi } \tau(\mathrm{t}) \notin [\mathrm{a},\mathrm{b}] \end{cases}$$

[1] TS, Khoa Toán - Tin học, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

Nghiệm của bài toán (1), (2) là hàm số có đạo hàm đến cấp $(n-1)$ liên tục tuyệt đối trên đoạn $[a,b]$, thỏa phương trình (1) hầu khắp nơi trên đoạn $[a,b]$ và thỏa điều kiện biên (2).

Trước hết ta nhắc lại các kết quả đã đạt được trong [1].

**Định nghĩa 1.** *Giả sử* $f_0 : C_n^+([a,b]) \to L([a,b],\mathbb{R}_+)$, $\psi_i : C_n^+([a,b]) \to \mathbb{R}_+$ *là các toán tử không giảm, liên tục và thuần nhất dương,* $g(t) \in L([a,b])$.

*Nếu hệ bất phương trình vi phân :*

$$\begin{aligned} &|\rho_i'(t)| \le |\rho_{i+1}'(t)|, \ a \le t \le b, \ (i = 1,2,\dots,n-1) \\ &|\rho_n'(t) - g(t)\rho_n(t)| \le f_0(|\rho_1|,|\rho_2|,\dots,|\rho_n|)(t), \ a \le t \le b \end{aligned} \tag{3}$$

*với điều kiện :*

$$\min\{|\rho_i(t)| : a_i \le t \le b_i\} \le \psi_i(|\rho_1|,|\rho_2|,\dots,|\rho_n|) \ (i = 1,2,\dots,n) \tag{4}$$

*chỉ có nghiệm tầm thường, chúng ta nói rằng :*

$$(g, f_0, \psi_1,\dots,\psi_n) \in Nic([a,b], a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_n) \tag{5}$$

**Định lí 1.** *Giả sử* $(g, f_0, \psi_1,\dots,\psi_n) \in Nic([a,b], a_1,\dots,a_n, b_1,\dots,b_n)$ *và* $f, \varphi_1,\dots,\varphi_n$ *của bài toán (1), (2) thực hiện các điều kiện sau :*

$$\begin{aligned} &\left[f(u)(t) - g(t).u^{(n-1)}(t)\right] \operatorname{sign} u^{(n-1)}(t) \\ &\le f_0\left(|u|,\dots,|u^{(n-1)}|\right)(t) + \omega\left(t, \sum_{i=1}^{n} \|u^{(i-1)}\|_{C([a,b])}\right) \end{aligned} \tag{6a}$$

*với* $a_n \le t \le b$, $u \in C^{n-1}([a,b])$,

$$\ge f_0\left(|u|,\dots,|u^{n-1}|\right)(t) - \omega\left(t, \sum_{i=1}^{n} \|u^{(i-1)}\|_{C([a,b])}\right) \tag{6b}$$

*với mọi* $a \le t \le b_n$, $u \in C^{n-1}([a,b])$,

$$|\varphi_i(u)| \le \psi_i\left(|u|,\dots,|u^{(n-1)}|\right) + r\left(\sum_{i=1}^{n} \|u^{(i-1)}\|_{C([a,b])}\right) \tag{7}$$

*với mọi* $u \in C^{n-1}([a,b]), (i = 1,2,\dots,n)$.

*Trong đó hàm số* $w : [a,b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *là đo được đối với biến thứ nhất và không giảm đối với biến thứ hai. Hàm số* $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *là không giảm và*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho} \int_a^b \omega(t,\rho)\,dt = 0 = \lim_{\rho\to+\infty} \frac{1}{\rho} r(\rho) \tag{8}$$

*Khi đó bài toán biên (1), (2) có ít nhất một nghiệm.*

**Định lí 2.** *Giả sử điều kiện (5) được thực hiện và $f, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ của bài toán (1), (2) thỏa các điều kiện sau :*

$$\left[f(u)(t) - f(v)(t) - g(t)(u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t)\right] . \mathrm{sign}(u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t))$$
$$\leq f_0\left(|u - v|, \dots, \left|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\right|\right)(t) \quad (9a)$$

*với* $a_n \leq t \leq b,\ u, v \in C^{n-1}([a, b])$

$$\left[f(u)(t) - f(v)(t) - g(t)(u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t)\right] . \mathrm{sign}(u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t))$$
$$\geq -f_0\left(|u - v|, \dots, \left|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\right|\right)(t) \quad (9b)$$

*với* $a \leq t \leq b_n,\ u, v \in C^{n-1}([a, b])$

$$|\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \leq \psi_i\left(|u - v|, \dots, \left|u^{(n-1)} - v^{(n-1)}\right|\right) \quad (10)$$

*với mọi* $u, v \in C^{n-1}([a, b])$*. Khi đó bài toán (1), (2) có duy nhất một nghiệm.*

Từ các kết quả trên và bổ đề dưới đây ta thu được các kết quả sau.

**Định lí 3.** *Giả sử các điều kiện sau là được thực hiện :*

$$f(u)(t)\sin g u^{(n-1)}(t) \leq \sum_{j=1}^{n} h_j(t)\left|u^{(j-1)}(t)\right| + \sum_{j=1}^{n} k_j(t)\left|S_{\tau_j}\left(u^{(j-1)}\right)(t)\right| +$$
$$+\ \omega\left(t, \sum_{i=1}^{n}\left\|u^{(i-1)}\right\|_{C([a,b])}\right) \quad (11a)$$

*với* $a_n \leq t \leq b,\ u \in C^{(n-1)}([a, b])$ *và*

$$f(u)(t)\sin g u^{(n-1)}(t) \geq -\sum_{j=1}^{n} h_j(t)\left|u^{(j-1)}(t)\right| - \sum_{j=1}^{n} k_j(t)\left|S_{\tau_j}\left(u^{(j-1)}\right)(t)\right| -$$
$$-\ \omega\left(t, \sum_{i=1}^{n}\left\|u^{(i-1)}\right\|_{C([a,b])}\right) \quad (11b)$$

*với* $a \leq t \leq b_n,\ u \in C^{(n-1)}([a, b])$.

*Trên* $C^{(n-1)}([a, b])$ *điều kiện sau được thực hiện :*

$$|\varphi_i(u)| \leq \sum_{j=1}^{n} r_{ij}\left\|u^{(j-1)}\right\|_{L^2_{([a,b])}} + r \quad (12)$$

*với* $u \in C^{(n-1)}([a, b])\ (i = 1, 2, \dots, n)$.

*Trong đó $r, r_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ là các số thực không âm. $\omega: [a, b] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ là hàm đo được đối với biến thứ nhất, không giảm dần với biến thứ hai và thỏa điều kiện (8).*

$$h_i, k_i \in L^p([a, b], \mathbb{R}_+), \ p \geq 1, \ \frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1, \ \tau_i \in AC([a.b]) \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

*là đơn điệu và*

$$s_i = \sum_{m=1}^{n} \left\{ (b-a)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=i}^{n} \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}(j-i)} \left( \prod_{k=i}^{j-1} \Delta_k \right) r_{jm} + \right.$$
$$\left. + \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}(n+1-i)} \left( \prod_{k=i}^{n-1} \Delta_k \right) \left( h_{om} + \frac{k_{om}}{\delta_m^{1/q}} \right) \right\} < 1 \quad (13)$$

*(i=1,2,...,n).*

*Trong đó :*

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \max\left\{ (b-a_k)^{1-\frac{2}{q}}, (b_k - a)^{1-\frac{2}{q}} \right\}, \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ h_{om} &= \max\left\{ \|h_m\|_{L^p([a,b_n])}, \|h_m\|_{L^p([a_n,b])} \right\}, \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \\ k_{om} &= \max\left\{ \|k_m\|_{L^p([a,b_n])}, \|k_m\|_{L^p([a_n,b])} \right\}, \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

*và*

$$\delta_m = \text{vrai}\min\left\{ |\tau_k'(t)| : a \leq t \leq b \right\} > 0 \ (m = 1, 2, \ldots, n). \quad (14)$$

*Khi đó bài toán (1), (2) có ít nhất một nghiệm.*

**Định lí 4.** *Giả sử các bất đẳng thức sau được thực hiện :*

$$\left[ f(u)(t) - f(v)(t) \right] \operatorname{sign}\left[ u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t) \right] \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} h_j(t) \left| u^{(j-1)}(t) - v^{(j-1)}(t) \right| + \sum_{j=1}^{n} k_j(t) \left| S_{\tau_j}\left( u^{(j-1)} - v^{(j-1)} \right)(t) \right| \quad (15a)$$

*với $a_n \leq t \leq b$, $u, v \in C^{(n-1)}([a, b])$*

$$\left[ f(u)(t) - f(v)(t) \right] \operatorname{sign}\left[ u^{(n-1)}(t) - v^{(n-1)}(t) \right] \geq$$
$$\geq -\sum_{j=1}^{n} h_j(t) \left| u^{(j-1)}(t) - v^{(j-1)}(t) \right| - \sum_{j=1}^{n} k_j(t) \left| S_{\tau_j}\left( u^{(j-1)} - v^{(j-1)} \right)(t) \right| \quad (15b)$$

*với* $a \le t \le b_n$, $u, v \in C^{(n-1)}([a,b])$ *và trong* $C^{(n-1)}([a,b])$

$$|\varphi_i(u) - \varphi_i(v)| \le \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \left\| u^{(j-1)} - v^{(j-1)} \right\|_{L^q([a,b])} \tag{16}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

*Trong đó các hàm số* $h_i, k_i$ *và các hằng số* $r_{ij}, s_i$ *và* $\delta_i$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *thỏa các điều kiện trong Định lý 3.*

Khi đó bài toán (1), (2) có duy nhất một nghiệm.

Để chứng minh Định lí 3, 4 ta cần đến bổ đề sau :

**Bổ đề 1.** *Giả sử* $h_i, k_i \in L^p([a,b], \mathbb{R}_+)$, $\tau_i \in AC([a,b])$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $p \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{2}{q} = 1$ *và*

$$f_o(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j(t) |x_j(t)| + \sum_{j=1}^{n} k_j(t) \left| S_{\tau_j}(x_j)(t) \right| \tag{17}$$

*với* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C_n([a,b]), (i = 1, 2, ., n)$.

$$\psi_i(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \|x_j\|_{L^q([a,b])} \tag{18}$$

*với* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C_n([a,b]), (i = 1, 2, \ldots, n)$. *Trong đó* $h_i, k_i, r_{ij}, \tau_i, (i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *thỏa các điều kiện trong Định lí 3. Khi đó điều kiện (5) được thực hiện.*

**Chứng minh Bổ đề.** Giả sử các điều kiện của Bổ đề được thực hiện. Để chứng minh điều kiện (5) thỏa ta chỉ cần chỉ ra rằng nếu véctơ $(\rho_1(t), \rho_2(t), \ldots, \rho_n(t))$ là nghiệm của bài toán (3), (4), thì véctơ đó phải là véctơ không. Trước hết ta chọn điểm $t_i$ thuộc đoạn $[a_i, b_i]$ sao cho :

$$|\rho_i(t_i)| = \min\{\rho_i(t) : a_i \le t \le b_i\} \ (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Tích phân bất đẳng thức (3) và áp dụng bất đẳng thức Honder ta có :

$$|\rho_i(t)| \le |\rho_i(t_i)| + \left| \int_{t_i}^{t} |\rho_{i+1}(\tau)| \, d\tau \right| \le$$

$$\le |\rho_i(t_i)| + |t - t_i|^{1-\frac{2}{q}} \left| \int_{t_i}^{t} |\rho_{i+1}(\tau)|^{\frac{q}{2}} \, d\tau \right|^{\frac{2}{q}}, \ (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

và

$$|\rho_n(t)| \le |\rho_n(t_n)| + \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_n}^{t} h_j(\tau) |\rho_j(\tau)| \, d\tau \right| + \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_n}^{t} k_j(\tau) \left| S_{\tau_j}(\rho_j)(\tau) \right| d\tau \right| \le$$

$$\le |\rho_n(t_n)| + \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_n}^{t} |h_j(\tau)|^p \, d\tau \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_{t_n}^{t} |\rho_j(\tau)|^{\frac{q}{2}} \, d\tau \right|^{\frac{2}{q}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{t_n}^{t} |k_j(\tau)|^p \, d\tau \right|^{\frac{1}{p}} \left| \int_{t_n}^{t} \left| S_{\tau_j}(\rho_j)(\tau) \right|^{\frac{q}{2}} d\tau \right|^{\frac{2}{q}}.$$

Lấy chuẩn hai vế của bất đẳng thức trên và áp dụng bất Wirtinger (bổ đề 4.7 trong [2]) ta nhận được :

$$\|\rho_i(t)\|_{L^q([a,b])} \le (b-a)^{\frac{1}{q}} |\rho_i(t_i)| + \\ + \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}} \Delta_i \|\rho_{i+1}(t)\|_{L^q([a,b])}, (i = 1, 2, \ldots, n-1). \quad (20)$$

$$\|\rho_i(t)\|_{L^q([a,b])} \le (b-a)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=i}^{n} \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}(j-i)} \times \\ \times \prod_{k=i}^{j-1} \Delta_k |\rho_j(t_j)| + \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}(n-i)} \prod_{k=i}^{n-1} \Delta_k \|\rho_n\|_{L^q([a,b])} \, (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

và

$$\|\rho_n\|_{L^q([a,b])} \le (b-a)^{\frac{1}{q}} |\rho_n(t_n)| + \sum_{j=1}^{n} h_{oj} \left[ \int_a^b \left| \int_{t_n}^{t} |\rho_j(\tau)|^{\frac{q}{2}} \, d\tau \right|^2 dt \right]^{\frac{2}{q}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} k_{oj} \left[ \int_a^b \left| \int_{t_n}^{t} \left| S_{\tau_j}(\rho_j)(\tau) \right|^{\frac{q}{2}} d\tau \right|^2 dt \right]^{\frac{2}{q}} \le$$

$$\le (b-a)^{\frac{1}{q}} |\rho_n(t_n)| + \sum_{j=1}^{n} h_{oj} \left[ \left( \frac{2(b-a)}{\pi} \right)^2 \int_a^b |\rho_j(t)|^q \, dt \right]^{\frac{1}{q}} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} k_{oj} \left[ \left( \frac{2(b-a)}{\pi} \right)^2 \int_a^b \left| S_{\tau_j}(\rho_j)(t) \right|^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le (b-a)^{\frac{1}{q}} |\rho_n(t_n)| + \left[ \frac{2(b-a)}{\pi} \right]^{\frac{2}{q}} \sum_{j=1}^{n} \left( h_{oj} + \frac{k_{oj}}{\delta_j^{\frac{1}{q}}} \right) \|\rho_j\|_{L^q([a,b])} \quad (21)$$

Theo (14) ta có :

$$\int_a^b |S_{\tau_j}(\rho_j)(t)|^q\, dt \le \frac{1}{\delta_j}\int_a^b |\rho_j(t)|^q dt.$$

Thay (21) vào (20) ta có :

$$\|\rho_i\|_{L^q([a,b])} \le (b-a)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^{\frac{2}{q}(j-i)} \left(\prod_{k=i}^{j-1}\Delta_k\right) |\rho_j(t_j)| +$$
$$+ \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^{\frac{2}{q}(n+1-i)} \left(\prod_{k=i}^{n-1}\Delta_k\right) \sum_{j=1}^{n}\left(h_{oj} + \frac{k_{oj}}{\delta_j^{1/q}}\right) \|\rho_j\|_{L^q([a,b])} \quad (22)$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Thay (5), (18) và (19) vào bất đẳng thức trên ta nhận được :

$$\|\rho_i\|_{L^q([a,b])} \le \sum_{m=1}^{n}\left\{(b-a)^{\frac{1}{q}} \sum_{j=i}^{n} \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^{\frac{2}{q}(j-i)} \left(\prod_{k=i}^{j-1}\Delta_k\right) r_{jm} + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{2(b-a)}{\pi}\right]^{\frac{2}{q}(n+1-i)} \left(\prod_{k=i}^{n-1}\Delta_k\right) \left(h_{om} + \frac{k_{om}}{\delta_m^{1/q}}\right)\right\} \|\rho_m\|_{L^q([a,b])} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Đặt $\rho_o = \max\left\{\|\rho_i\|_{L^q([a,b])} : i = 1, 2, \ldots, n\right\}$ ta nhận được:

$$\rho_o \le \rho_o \max\{s_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Vì $s_i < 1$ nên $\rho_o = 0$. Do đó $\rho_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh các Định lí 3, 4 dễ dàng nhận được từ Định lí 1, 2 và bổ đề trên.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] Nguyễn Anh Tuấn, *Một lớp bài toán biên cho phương trình vi phân hàm bậc cao*, Tạp chí khoa học số 4 (12-2004). Trường Đại học Sư phạm Tp.Hồ Chí Minh.

[2] Kiguradze.I.T, *Some singluar boudary value of problem for ordinary equations* (in Russian), Tbilisi Univ. Press 1975.

[3] Levin.V.I, *On inequlities II*, (in Russian) Mat. Sbornik, 1938,(46), No.2, 309-324.

Tóm tắt :

**Một tiêu chuẩn hiệu quả về tính giải được của bài toán biên cho phương trình vi phân hàm bậc cao**

Trong bài báo này chúng ta trình bày một tiêu chuẩn hiệu quả mới cho sự tồn tại và duy nhất nghiệm của bài toán biên cho phương trình hàm bậc cao với điều kiện biên dạng hàm được xây dựng bằng phương pháp đánh giá tiệm cận.

Abstract :

**An effective criterion on solvability of a boundary value problem for a differential equation of high degree**

In this paper we present a new effective criterion for the existence and uniqueness of solution of boundary value problem for a functional-differential equation of higher degree with functional boundary conditions, that are constructed by the method of the asymptote estimates.