BỨC TRANH HÌNH HỌC CÁC K-QUĨ ĐẠO CỦA CÁC MD5-NHÓM LIÊN THÔNG ĐƠN LIÊN MÀ CÁC MD5-ĐẠI SỐ TƯƠNG ỨNG CÓ IDEAL DẪN XUẤT GIAO HOÁN BỐN CHIỀU

Lê Anh Vũ [*], Dương Quang Hoà [†]

1. Mở đầu

1.1 K-quĩ đạo là gì? Tại sao cần mô tả các K-quĩ đạo ?

Lí thuyết biểu diễn là một lĩnh vực rộng lớn trong Toán học và liên quan tới rất nhiều lĩnh vực khác nhau của Toán học hiện đại. Trong lí thuyết biểu diễn, một nhánh nghiên cứu đóng vai trò hết sức quan trọng là *lí thuyết biểu diễn nhóm Lie* (*và đại số Lie*). *Nhóm Lie* là một khái niệm tổng hoà từ hai khái niệm cơ bản là *nhóm* (trong Đại số học) và *đa tạp vi phân* (trong Hình học – Tô pô). Cả nhóm lẫn đa tạp vi phân đều có nguồn gốc vật lí, cơ học và tìm thấy rất nhiều mô hình trong vật lí, cơ học. Do đó, lí thuyết biểu diễn nhóm Lie nhận được rất nhiều ứng dụng trong vật lí, cơ học đồng thời chính các ứng dụng đó đã kích thích sự phát triển của lí thuyết biểu diễn nhóm Lie.

Đối với mỗi nhóm Lie, bài toán cơ bản và quan trọng nhất của lí thuyết biểu diễn là *mô tả* các lớp tương đương của *tất cả các biểu diễn bất khả qui, unitar* của nhóm đó.

Năm 1962, Kirillov [2] đã phát minh ra *phương pháp quĩ đạo*. Nhờ phương pháp này, ta có thể dựng được các biểu diễn bất khả qui unitar của mỗi nhóm Lie từ các *quĩ đạo trong biểu diễn đối phụ hợp* (còn gọi là *K-quĩ đạo*) của nhóm đó. Nếu nhóm Lie là compact liên thông hay đơn liên giải được, phương pháp quĩ đạo cho phép thu được tất cả các biểu diễn bất khả qui unitar. Còn đối với các nhóm Lie đơn liên tùy ý (không nhất thiết giải được), phương pháp quĩ đạo cho phép nhận được hầu hết các biểu diễn bất khả qui unitar, tức là tập các biểu diễn bất khả qui unitar còn lại có độ đo Planserrell triệt tiêu (xem [3]). Như vậy, phương pháp quĩ đạo chính là phương pháp cơ bản và quan trọng nhất trong lí thuyết biểu diễn nhóm Lie.

[*] PGS.TS, Khoa Toán – Tin học, Trường ĐHSP Tp.HCM
[†] Học viên cao học Khoá 15 ngành Hình học và Topo, Trường ĐHSP Tp.HCM

Trong phương pháp quĩ đạo Kirillov, các *K-quĩ đạo* (nguyên) *đóng vai trò then chốt để từ đó dựng nên các biểu diễn bất khả qui unitar*. Bởi thế, đối với mỗi nhóm Lie, để nghiên cứu biểu diễn của nó, trước hết cần phải xét K-biểu diễn, cụ thể là cần *mô tả các K-quĩ đạo* của nó. Đó là *một việc làm cần thiết và có ý nghĩa.*

1.2 Các kết quả trước đây liên quan trực tiếp đến bài báo

– *Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán chiều không quá 3, mô tả hình học K-biểu diễn của các MD5-nhóm liên thông bất khả phân tương ứng và xét các MD5-phân lá tương ứng với các MD5-nhóm đã xét* (xem các công trình [5], [6], [7], [8]).

– *Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều* (xem bài [9] của tác giả thứ nhất được đăng trong cùng số báo này).

1.3 Tóm tắt kết quả chính của bài báo

Bài này sẽ xét các MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với các MD5-đại số đã phân loại trong bài [9]. Cụ thể, chúng ta sẽ mô tả triệt để hình học các K-quĩ đạo của mỗi MD5-nhóm đó.

Việc khảo sát các MD5-phân lá tương ứng với các MD5-nhóm đã xét, phân loại tô pô các phân lá đó đồng thời mô tả C*-đại số của các phân lá không có kiểu phân thớ đang được chúng tôi nghiên cứu và sẽ được công bố trong các bài tiếp theo.

Trước khi phát biểu và chứng minh kết quả chính, chúng ta sẽ nhắc lại một số khái niệm có liên quan và liệt kê lại các MD5-đại số đã được phân loại trong [9] để bạn đọc tiện theo dõi.

2. Nhắc lại vài khái niệm và các kết quả có liên quan

2.1 Các MD5-đại số với ideal dẫn xuất 4 chiều giao hoán và các MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng

2.1.1. Mệnh đề (xem [9])

Giả sử Γ *là một MD5-đại số với* $\Gamma^1 := [\Gamma, \Gamma] \cong \mathbb{R}^4$ *(đại số Lie giao hoán 4 chiều).*

– *Nếu $\boldsymbol{\Gamma}$ khả phân thì nó có dạng $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{h} \oplus \mathbb{R}$, ở đó $\mathbf{h}$ là một MD4-đại số.*

– *Nếu $\boldsymbol{\Gamma}$ bất khả phân thì ta luôn có thể chọn được một cơ sở thích hợp $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ trong Γ sao cho $\boldsymbol{\Gamma}^1 = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle \cong \mathbb{R}^4$, $ad_{X_1} \in End(\Gamma^1)(\cong Mat_4(\mathbb{R}))$, và $\boldsymbol{\Gamma}$ đẳng cấu với một và chỉ một trong các đại số Lie dưới đây.*

1. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,1\,(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}}$ **:**

$$ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1.$$

2. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,2\,(\lambda_1,\lambda_2)}}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$

3. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,3\,(\lambda)}}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$

4. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,4\,(\lambda)}}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$

5. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,5}}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

6. $\boldsymbol{\Gamma_{5,4,6\,(\lambda_1,\lambda_2)}}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$

7. $\Gamma_{5,4,7(\lambda)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$

8. $\Gamma_{5,4,8(\lambda)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$

9. $\Gamma_{5,4,9(\lambda)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$

10. $\Gamma_{5,4,10}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

11. $\Gamma_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$ **:**

$$ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \varphi \in (0,\pi).$$

12. $\Gamma_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0,\pi).$

13. $\Gamma_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0,\pi).$

14. $\Gamma_{5,4,14}(\lambda,\mu,\varphi)$ **:** $ad_{X_1}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0\\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -\mu\\ 0 & 0 & \mu & \lambda\end{bmatrix};\lambda,\mu\in\mathbb{R},\mu>0,\varphi\in(0,\pi).\square$

2.2 Các họ MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng

Nhắc lại rằng, mỗi đại số Lie thực **Γ** xác định duy nhất một nhóm Lie liên thông đơn liên **G** sao cho Lie(**G**) = **Γ**. Do đó, từ mệnh đề **2.3.1**, ta nhận được 14 họ MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với các MD5-đại số đã được liệt kê và phân loại như trên. Để tiện, ta vẫn dùng lại các chỉ số đã dùng để phân loại các MD5-đại số cho chính MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng. Chẳng hạn, **G** =$\mathbf{G}_{5,4,1}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ là MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với MD5-đại số **Γ** =$\mathbf{\Gamma}_{5,4,1}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Các họ MD5-nhóm này đều bất khả phân. Như vậy, ta có được 14 họ MD5-nhóm liên thông đơn liên sau đây: $G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$, $G_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,4,3(\lambda)}$, $G_{5,4,4(\lambda)}$, $G_{5,4,5}$, $G_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,4,7(\lambda)}$, $G_{5,4,8(\lambda)}$, $G_{5,4,9(\lambda)}$, $G_{5,4,10}$, $\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$; $G_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$, $G_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$, $\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\varphi\in(0;\pi)$; $G_{5,4,14(\lambda,\mu,\varphi)}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\mu>0\ \ \varphi\in(0;\pi)$. Kết quả chính của bài này là phép mô tả hình học các K-quĩ đạo của từng nhóm thuộc 14 họ đó.

3. Bức tranh hình học các k-quĩ đạo của các MD5-nhóm liên thông đơn liên đã xét

3.1 Các kí hiệu

Giả sử **G** là một trong các nhóm Lie $G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$, $G_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,4,3(\lambda)}$, $G_{5,4,4(\lambda)}$, $G_{5,4,5}$, $G_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,4,7(\lambda)}$, $G_{5,4,8(\lambda)}$, $G_{5,4,9(\lambda)}$, $G_{5,4,10}$, $\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$; $G_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$, $G_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$, $\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\varphi\in(0;\pi)$; $G_{5,4,14(\lambda,\mu,\varphi)}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R},\mu>0\ \ \varphi\in(0;\pi)$. Kí hiệu **Γ** là đại số Lie của nhóm **G**. Ta luôn chọn một cơ sở thích hợp (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5) trong **Γ**. Lúc đó, với tư cách là một không gian vectơ 5 chiều, $\mathbf{\Gamma}\equiv\mathbb{R}^5$. Không gian đối ngẫu của **Γ** được kí hiệu là **Γ***. Ta cũng có đồng nhất thức $\mathbf{\Gamma^*}\equiv\mathbb{R}^5$ với cơ sở đối ngẫu $(X_1^*,X_2^*,X_3^*,X_4^*,X_5^*)$ của cơ sở (X_1,X_2,X_3,X_4,X_5).

Xét phần tử tùy ý $F(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\sigma) \in \mathbf{\Gamma} \equiv \square^{5}$. Như thông thường ta kí hiệu Ω_F là K-quĩ đạo chứa F của **G** trong $\mathbf{\Gamma}^* \equiv \square^{5}$.

3.2 Vài bổ đề

Phép chứng minh các kết quả chính cần dùng vài bổ đề đã được chứng minh trong [4].

3.2.1. Bổ đề (xem [4])

Ta luôn có bao hàm thức

$$\Omega_F \supset \Omega_F(\mathbf{\Gamma}) := \{F_X \,/\, X \in \mathbf{\Gamma}\},$$

ở đó, với mỗi $X \in \mathbf{\Gamma}$, F_X *là phần tử trong* $\mathbf{\Gamma}^*$ *xác định bởi*

$$< F_X, U > := < F, exp(ad_X)U >, \ \forall U \in \mathbf{\Gamma}.$$

Hơn nữa nếu ánh xạ mũ exp_G *là toàn ánh thì đẳng thức xảy ra.* □

3.2.2. Bổ đề (xem [4])

Giả sử **G** *liên thông. Nếu họ các* $\Omega_F(\mathbf{\Gamma})$, $F \in \mathbf{\Gamma}^*$, *lập thành một phân hoạch của* $\mathbf{\Gamma}^*$ *và họ các* $\Omega_{F'}(\mathbf{\Gamma})$, $F' \in \Omega_F$, *hoặc cùng đóng hoặc cùng mở (tương đối) trong* Ω_F, $F \in \mathbf{\Gamma}^*$. *Khi đó*

$$\Omega_F = \Omega_F(\Gamma), \ \forall F \in \Gamma. \ \square$$

3.3 Các kết quả chính

3.3.1. Định lí (Hình học các K-quĩ đạo của nhóm $G = G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$)

K-quĩ đạo Ω_F *chứa F của nhóm* $G = G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$ *chỉ hoặc không chiều hoặc hai chiều và được mô tả như dưới đây.*

(i) Nếu $\beta = \gamma = \delta = \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F(\alpha,0,0,0,0)\}$ *(không chiều).*

Các trường hợp tiếp theo sau đây quĩ đạo đều là các nửa mặt phẳng 2 chiều.

(ii) Nếu $\beta = \gamma = \delta = 0, \sigma \neq 0$ *thì* $\Omega_F = \{F(x,0,0,0,s) : \sigma.s > 0\}$.

(iii) Nếu $\beta = \gamma = 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F(x,0,0,t,0) : \delta.t > 0\}$.

(iv) Nếu $\beta = 0, \gamma \neq 0, \delta = \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F(x,0,z,0,0): \gamma.z > 0\}$.

(v) Nếu $\beta \neq 0, \gamma = \delta = \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F(x,y,0,0,0): \beta.y > 0\}$.

Các trường hợp còn lại dưới đây quĩ đạo đều là các mặt trụ 2 chiều.

(vi) Nếu $\beta = \gamma = 0, \delta \neq 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,0,0,t,s): t = \delta.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_3}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(vii) Nếu $\beta = 0, \gamma \neq 0, \delta = 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,0,z,0,s): z = \gamma.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_2}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(viii) Nếu $\beta \neq 0, \gamma = 0, \delta = 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,y,0,0,s): y = \beta.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_1}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(ix) Nếu $\beta = 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,0,z,t,0): z = \gamma.\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}; \delta.t > 0 \right\}.$$

(x) Nếu $\beta \neq 0, \gamma = 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,y,0,t,0): y = \beta.\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}; \delta.t > 0 \right\}.$$

(xi) Nếu $\beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta = 0, \sigma = 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,y,z,0,0): y = \beta.\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}; \gamma.z > 0 \right\}.$$

(xii) Nếu $\beta = 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x,0,z,t,s): z = \gamma\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_2}; t = \delta.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_3}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(xiii) Nếu $\beta \neq 0, \gamma = 0, \delta \neq 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x, y, 0, t, s) : y = \beta\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_1}; t = \delta.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_3}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(xiv) Nếu $\beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta = 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x, y, z, 0, s) : y = \beta\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_1}; z = \gamma.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_2}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

(xv) Nếu $\beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0, \sigma = 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x, y, z, t, 0) : y = \beta\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_3}}; z = \gamma.\left(\frac{t}{\delta}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_3}}; \delta.t > 0 \right\}.$$

(xvi) Nếu $\beta \neq 0, \gamma \neq 0, \delta \neq 0, \sigma \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ F(x, y, z, t, s) : y = \beta\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_1}; t = \delta.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_3}; z = \gamma.\left(\frac{s}{\sigma}\right)^{\lambda_2}; \sigma.s > 0 \right\}.$$

Chứng minh.

Lấy phần tử bất kì X = (a; b; c; d; f)$\in$**Γ**. Tính toán trực tiếp ta được

$$ad_X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b\lambda_1 & a\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ -c\lambda_2 & 0 & a\lambda_2 & 0 & 0 \\ -d\lambda_3 & 0 & 0 & a\lambda_3 & 0 \\ -f & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix};$$

$$\exp\left(ad_X\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{b\left(1 - e^{a\lambda_1}\right)}{a} & e^{a\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{c\left(1 - e^{a\lambda_2}\right)}{a} & 0 & e^{a\lambda_2} & 0 & 0 \\ \dfrac{d\left(1 - e^{a\lambda_3}\right)}{a} & 0 & 0 & e^{a\lambda_3} & 0 \\ \dfrac{f\left(1 - e^{a}\right)}{a} & 0 & 0 & 0 & e^{a} \end{bmatrix}.$$

Do đó, toạ độ $F_X \in$ **Γ*** như sau

$$\begin{cases} x = \alpha + \dfrac{b.\left(1 - e^{a\lambda_1}\right)}{a}\beta + \dfrac{c.\left(1 - e^{a\lambda_2}\right)}{a}\gamma + \dfrac{d.\left(1 - e^{a\lambda_3}\right)}{a}\delta + \dfrac{f.\left(1 - e^{a}\right)}{a}\sigma \\ y = e^{a\lambda_1}.\beta \\ z = e^{a\lambda_2}.\gamma \\ t = e^{a\lambda_3}.\delta \\ s = e^{a}.\sigma \end{cases}$$

Áp dụng các bổ đề **3.2.1** và **3.2.2**, ta được kết luận của định lí. □

Hoàn toàn tương tự, đối với các MD5-nhóm còn lại, chúng ta có các định lí dưới đây. Để cho gọn, các nhóm có bức tranh các K-quĩ đạo tương tự nhau chúng ta sẽ mô tả trong cùng một định lí. Hơn nữa, vì đã rõ các tham số của các nhóm thuộc tập hợp nào, chúng ta sẽ chỉ liệt kê miền xác định của chúng một lần trong mỗi định lí.

3.3.2. Định lí

Giả sử G là một trong các nhóm lie $G_{5,4,2(\lambda_1\lambda_2)}$, $G_{5,4,3(\lambda)}$, $G_{5,4,4(\lambda)}$, $G_{5,4,5}$, $G_{5,3,6(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,3,7(\lambda)}$, $G_{5,4,8(\lambda)}$, $G_{5,4,9(\lambda)}$, $G_{5,4,10}$; $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. *Khi đó ta có*

(i) Nếu $\beta = \gamma = \delta = \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F\}$, *(quĩ đạo 0_chiều).*

(ii) Nếu $\beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \sigma^2 \neq 0$ *thì quĩ đạo có chiều 2 và được cho bởi*

$$\Omega_F = \left[\begin{array}{l}
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda_1}, \gamma.e^{a\lambda_2}, \delta.e^{a}, \sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda}, \gamma.e^{a\lambda}, \delta.e^{a}, \sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,3(\lambda)};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda}, \gamma.e^{a}, \delta.e^{a}, \sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,4(\lambda)};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a}, \gamma.e^{a}, \delta.e^{a}, \sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,5};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda_1}, \gamma.e^{a\lambda_2}, \delta.e^{a}, \delta.ae^{a}+\sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda}, \gamma.e^{a\lambda}, \delta.e^{a}, \delta.ae^{a}+\sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,7(\lambda)};\\
\left\{\left(x, \beta.e^{a\lambda}, \beta.ae^{a\lambda}+\gamma.e^{a\lambda}, \delta.e^{a}, \delta.ae^{a}+\sigma.e^{a}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,8(\lambda)};\\
\left\{\left(\begin{array}{l} x, \beta.e^{a\lambda}, \gamma.e^{a}, \gamma.ae^{a}+\delta.e^{a}, \\ \qquad \gamma.\dfrac{a^2e^a}{2}+\delta.ae^{a}+\sigma.e^{a}\end{array}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,9(\lambda)};\\
\left\{\left(\begin{array}{l} x, \beta.e^{a}, \beta.ae^{a}+\gamma.e^{a}, \beta.\dfrac{a^2e^a}{2}+\gamma.ae^{a}+\delta.e^{a}, \\ \qquad \beta.\dfrac{a^3e^a}{6}+\gamma.\dfrac{a^2e^a}{2}+\delta.ae^{a}+\sigma.e^{a}\end{array}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,10}.
\end{array}\right.$$

3.3.3. Định lí

Giả sử **G** *là một trong các nhóm Lie* $G_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$, $G_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in (0;\pi)$. *Bằng cách đồng nhất đại số Lie của chúng với* $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2$, *xem* $F \equiv (\alpha, \beta + i\gamma, \delta, \sigma)$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda \in \mathbb{R}^*$; $\varphi \in (0;\pi)$, *ta được*

(i) Nếu $\beta + i\gamma = \delta = \sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F\}$ *(quĩ đạo 0 chiều).*

(ii) Nếu $|\beta + i\gamma|^2 + \delta^2 + \sigma^2 \neq 0$ *thì quĩ đạo có chiều 2 và được cho bởi*

$$\Omega_F = \left[\begin{array}{l}
\left\{\left(x, (\beta+i\gamma).e^{\left(a.e^{-i\varphi}\right)}, \delta.e^{a\lambda_1}, \sigma.e^{a\lambda_2}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)};\\
\left\{\left(x, (\beta+i\gamma).e^{\left(a.e^{-i\varphi}\right)}, \delta.e^{a\lambda}, \sigma.e^{a\lambda}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,12(\lambda,\varphi)};\\
\left\{\left(x, (\beta+i\gamma).e^{\left(a.e^{-i\varphi}\right)}, \delta.e^{a\lambda}, \delta.ae^{a\lambda}+\sigma.e^{a\lambda}\right); x, a \in \mathbb{R}\right\} \text{ khi G = G}_{5,4,13(\lambda,\varphi)}.
\end{array}\right.$$

3.3.4. Định lí

Cho G là nhóm Lie $G_{5,4,14(\lambda,\mu,\varphi)}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\mu > 0$; $\varphi \in (0;\pi)$. *Bằng cách đồng nhất đại số Lie của nó với* $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *, xem F là điểm* $(\alpha, \beta + i\gamma, \delta + i\sigma)$, *ta được*

(i) Nếu $\beta + i\gamma = \delta + i\sigma = 0$ *thì* $\Omega_F = \{F\}$ *(quĩ đạo 0 chiều).*

(ii) Nếu $|\beta + i\gamma|^2 + |\delta + i\sigma|^2 \neq 0$ *thì*

$$\Omega_F = \left\{ \left(x, (\beta + i\gamma).e^{\left(a.e^{-i\varphi}\right)}, (\delta + i\sigma).e^{a.(\lambda - i\mu)} \right),\ x, a \in \mathbb{R} \right\}$$ *(quĩ đạo 2 chiều).* □

3.4 Nhận xét

Trong [4], tác giả thứ nhất đã chứng minh được rằng, đối với mỗi MD4-nhóm liên thông, đơn liên, bất khả phân, họ các K-quĩ đạo chiều cực đại luôn tạo thành một phân lá đo được. Trong [5], [6], [7], [8], khẳng định tương tự cũng được chứng minh cho các MD5-nhóm liên thông đơn liên với ideal dẫn xuất giao hoán không quá 3 chiều . Bằng phương pháp chứng minh tương tự, ta cũng có kết luận dưới đây.

3.4.1. Mệnh đề

Giả sử **G** *là một MD5-nhóm liên thông đơn liên bất kỳ trong các nhóm* $G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$, $G_{5,4,2(\lambda_1\lambda_2)}$, $G_{5,4,3(\lambda)}$, $G_{5,4,4(\lambda)}$, $G_{5,4,5}$, $G_{5,3,6(\lambda_1,\lambda_2)}$, $G_{5,3,7(\lambda)}$, $G_{5,4,8(\lambda)}$, $G_{5,4,9(\lambda)}$, $G_{5,4,10}$, $G_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$, $G_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$, $G_{5,4,14(\lambda,\mu,\varphi)}$; $\mathbf{\Phi_G}$ *là họ các K-quĩ đạo chiều cực đại của nó và* $V_{\mathbf{G}} := \cup\{\Omega \,/\, \Omega \in \mathbf{\Phi_G}\}$. *Khi đó* $(V_{\mathbf{G}}, \mathbf{\Phi_G})$ *lập thành một phân lá đo được. Chúng ta sẽ gọi phân lá này là MD5-phân lá liên kết với* **G**. □

3.5 Vài bài toán mở cần tiếp tục nghiên cứu

3.5.1. Đối với tất cả các MD5-đại số và MD5-nhóm liên thông đơn liên đã xét, cần phân loại tô pô các MD5-phân lá tương ứng và mô tả C*-đại số của các kiểu MD5-phân lá không phải phân thớ bằng phương pháp KK-hàm tử.

3.5.2. Xây dựng lượng tử hóa biến dạng trên các MD5-nhóm đã phân loại.

3.5.3. Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán để hoàn thành việc phân loại triệt để toàn bộ lớp MD5-đại số.

3.5.4. Giải quyết các vấn đề tương tự như đã làm cho các MD5-đại số và MD5-nhóm đã xét cho các MD5-đại số và MD5-nhóm còn lại.

3.5.5. Tiếp tục xét lớp MDn với n ≥ 6 đồng thời xét trường hợp n tổng quát.

Lời cảm ơn : Các kết quả chính của bài này đã được tác giả thứ nhất báo cáo tại Hội thảo quốc tế lần thứ hai về Đại số và Tổ hợp (ICAC–07) ở Tây An, Trung Quốc từ 12-15 tháng 7 năm 2007. Các tác giả hân hạnh được cám ơn Ban tổ chức Hội thảo, đặc biệt là giáo sư K.P. Shum đã tài trợ cho tác giả thứ nhất tham dự và đọc báo cáo tại Hội thảo.

TÀI LIỆUTHAM KHẢO

[1]. A. Connes (1982), A Survay of Foliations and Operator Algebras, *Proc. Symp. Pure Math.*, 38, 512 – 628, Part I.

[2]. A. A. Kirillov (1962), Unitar peresentations of nilpotent Lie groups, *UMN* 17, No 4, 57 – 101 (In Russian).

[3]. A. A. Kirillov (1976), Elements of the Theory of Prepresentations, *Springer – Verlag*, Berlin – Heidenberg – New York.

[4]. Lê Anh Vũ (1990), Không gian phân lá tạo bởi các K-quĩ đạo chiều cực đại của lớp nhóm Lie MD4, *luận án Phó tiến sĩ khoa học Toán lí*, Viện toán học Việt Nam, 102 trang.

[5]. Le Anh Vu (2003), Foliations Formed by K – orbits of Maximal Dimension of Some MD5–Groups, *East–West Journal of Mathematics*, Vol. 5, N^{O} 3, pp. 159 – 168.

[6]. Le Anh Vu (2005), On a subclass of 5-dimensional Lie Algebras Which have 3-dimensional Commutative Derived Ideals, *East-West J. Math*, 7 N^{o} 1, 13-22.

[7]. Lê Anh Vũ, Nguyễn Công Trí (2006), Vài ví dụ về các MD5-đại số và các MD5-phân lá đo được liên kết với các MD5-nhóm tương ứng, *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 42 N° 8, 14-32.

[8]. Le Anh Vu, Duong Minh Thanh (2006), The Geometry of K-orbits of a Subclass of MD5-groups and Foliations Formed by Their Generic K-orbits, *Contributions in Math. And App., Proceeding of the International Conference in Math. And App., December 2005, Bangkok, Thailand,* A special Volume Published by East-West J. Math., 169-184.

[9]. Lê Anh Vũ (2007), *Phân loại lớp các MD-đại số năm chiều với ideal dẫn xuất 4 chiều*, Tạp chí Khoa học Trường ĐHSP Tp.HCM, Số 12(46).

Tóm tắt

Bức tranh hình học các k-quĩ đạo của các MD5-nhóm liên thông đơn liên mà các MD5-đại số tương ứng có ideal dẫn xuất giao hoán bốn chiều

Bài báo này xét một lớp con các MD5-nhóm, tức là các nhóm Lie thực giải được 5 chiều mà chỉ có các K-quĩ đạo không chiều hoặc chiều cực đại. Lớp các MD5-đại số Lie tương ứng đã được tác giả thứ nhất phân loại và công bố trước đó. Kết quả cơ bản mà bài báo đưa ra là mô tả tường minh bức tranh hình học của mỗi MD5-nhóm liên thông đơn liên đã xét.

Abstract

The geometrical picture of k-orbits of connected and simply connected MD5-groups such that their MD5-algebras have 4-dimensional commutative derived ideals

The paper presents a subclass of the class of MD5–groups, i.e., five dimensional solvable Lie groups such that their K–orbit are orbit of zero or maximal dimension. The main result of the paper is the description of the geometrical picture of K-orbits of connected and simply connected MD5-groups so that their MD5-algebras have 4-dimensional commutative derived ideals.