MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG TUYẾN TÍNH LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN PHI TUYẾN : SỰ TỒN TẠI VÀ KHAI TRIỂN TIỆM CẬN CỦA NGHIỆM THEO BỐN THAM SỐ BÉ

Trần Minh Thuyết [*], Lê Khánh Luận [†]
Trần Văn Lăng [‡], Võ Giang Giai [§]

1. Mở đầu

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng tuyến tính

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{1}$$

$$\mu(t)u_x(0,t) = K_0|u(0,t)|^{p_0-2}u(0,t) + \lambda_0|u_t(0,t)|^{q_0-2}u_t(0,t) + g(t), \tag{2}$$

$$-\mu(t)u_x(1,t) = K_1|u(1,t)|^{p_1-2}u(1,t) + \lambda_1|u_t(1,t)|^{q_1-2}u_t(1,t), \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \ u_t(x,0) = u_1(x), \tag{4}$$

trong đó trong đó $p_0, q_0, p_1, q_1 \geq 2, K, K_0, K_1, \lambda \geq 0, \lambda_0, \lambda_1 > 0$ là các hằng số cho trước và u_0, u_1, μ, F, g là các hàm cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ rõ sau đó.

Bài toán (1)-(4) là một mô hình toán học mô tả dao động dọc của một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính với ràng buộc đàn hồi nhớt phi tuyến ở biên. Gần đây, bài toán (1)-(4) cũng được nhiều nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu ở nhiều chủ đề như sự tồn tại, duy nhất và tính trơn, các tính chất định tính và định lượng của nghiệm, xấp xỉ tuyến tính nghiệm, khai triển tiệm cận nghiệm,…[1-3, 5-15].

Bài báo gồm ba phần chính. Trong phần 1, dưới các điều kiện $(u_0, u_1) \in H^1 \times L^2$, $(F, g, \mu) \in L^2(Q_T) \times L^{q_0'}(0,T) \times H^1(0,T)$, $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$, $\mu'(t) \leq 0$,

[*] TS, Trường ĐH Kinh tế Tp.HCM
[†] ThS, Trường ĐH Kinh tế Tp.HCM
[‡] PGS.TS, Phân viện Công nghệ Thông tin Tp.HCM
[§] ThS, Cộng tác viên khoa Toán – Tin, Trường ĐH Kinh tế Tp.HCM.

$p_0, q_0, p_1, q_1 \geq 2, \quad q_0' = q_0(q_0-1)^{-1}, \quad (K, \lambda, K_0, K_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3$, chúng tôi chứng minh một định lí tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu u của bài toán (1)-(4). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lí luận quen thuộc về sự hội tụ yếu, toán tử đơn điệu và tính compact. Trong phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm yếu $u \in L^\infty(0,T;H^2)$, với $u_t \in L^\infty(0,T;H^1)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)$, $u(0,\cdot)$, $u(1,\cdot) \in H^2(0,T)$, nếu ta giả sử $(u_0,u_1) \in H^2 \times H^1$, $q_0 = q_1 = 2$, $p_0, p_1 \geq 2$, và một số điều kiện khác. Cuối cùng, trong phần 3, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm u của bài toán (1)-(4) đến cấp $N+1$ theo bốn tham số K, λ, K_0, K_1. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hoá tương đối các kết quả trong [1-3, 5-15].

2. Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm

Đặt $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian thông dụng như $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Ta kí hiệu $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $m = 0,1,...$

Chuẩn L^2 được kí hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng kí hiệu bởi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta kí hiệu bởi $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của một không gian Banach X và bởi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta kí hiệu bởi $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ cho không gian Banach các hàm $u:(0,T) \to X$ đo được, sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \text{ với } 1 \leq p \leq \infty,$$

và

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = ess\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_X < \infty \text{ với } p = \infty.$$

Kí hiệu $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt.

Trên H^1 ta sẽ dùng các chuẩn tương đương

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|v_x\|^2\right)^{1/2}, \ \|v\|_1 = \left(v^2(1) + \|v_x\|^2\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Ta thành lập các giả thiết sau :

(H_1) $\quad (u_0, u_1) \in H^1 \times L^2,$

(H_2) $\quad F \in L^2(Q_T),$

(H_3) $\quad \mu \in H^1(0,T),\ \mu(t) \geq \mu_0 > 0,\ \mu'(t) \leq 0,$

(H_4) $\quad g \in L^{q_0'}(0,T),\ \ q_0' = q_0(q_0 - 1)^{-1},$

(H_5) $\quad (\mathrm{K}, \lambda, \mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3,$

(H_6) $\quad p_0, q_0, p_1, q_1 \geq 2,$

(H_7) $\quad \lambda_0, \lambda_1 > 0.$

Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $\lambda_0 = \lambda_1 = 1$. Khi đó ta có định lí sau.

Định lí 1. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1) - (H_6)$ *đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu* u *của bài toán* (1)-(4) *sao cho*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_t \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,\cdot) \in W^{1,q_0}(0,T),\ u(1,\cdot) \in W^{1,q_1}(0,T). \end{cases} \tag{6}$$

Hơn nữa, nếu $\mathrm{p}_0, \mathrm{p}_1 \in \{2\} \cup [3, +\infty)$ *thì nghiệm có được là duy nhất.*

Chú thích 1. Định lí 1 chưa khẳng định về tính duy nhất của nghiệm khi $2 < p_0 < 3$ hoặc $2 < p_1 < 3$. Tuy nhiên, việc xây dựng một bộ các giả thiết $(H_1) - (H_6)$ với p_0, p_1 trong (H_6) thỏa $2 < p_0 < 3$ hoặc $2 < p_1 < 3$ sao cho bài toán (1)-(4) có ít nhất hai nghiệm thỏa (6) là một bài toán mở. Trong định lí 2, chúng tôi tăng cường các giả thiết $(H_1) - (H_6)$ và thu được tính duy nhất nghiệm trong trường hợp $p_0, p_1 \geq 2,\ q_0 = q_1 = 2$.

Chứng minh Định lí 1. Sự tồn tại nghiệm được chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin [4] kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lí luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và kĩ thuật qua giới hạn số hạng phi tuyến bằng phương pháp đơn điệu. Tính duy nhất nghiệm được dựa vào bổ đề Gronwall. □

Phần sau đây, để thu được nghiệm tốt hơn, ta tăng cường thêm các giả thiết như sau

$(H_1^/)$ $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$,

$(H_2^/)$ $F,\ F_t \in L^2(Q_T)$,

$(H_3^/)$ $\mu \in W^{2,1}(0,T),\ \mu(t) \geq \mu_0 > 0$,

$(H_4^/)$ $g \in H^1(0,T)$,

$(H_5^/)$ $\mathrm{K}, \lambda \in \mathbb{R};\ \mathrm{K}_0,\ \mathrm{K}_1 \geq 0$,

$(H_6^/)$ $p_0,\ p_1 \geq 2,\ q_0 = q_1 = 2$.

Khi đó ta có định lí sau.

Định lí 2. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1^/) - (H_6^/)$ *đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu* u *của bài toán* (1)-(4) *sao cho*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H^2),\, u_t \in L^\infty(0,T;H^1),\, u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,\cdot),\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T). \end{cases} \tag{7}$$

Chú thích 2. Từ (7), ta suy ra rằng

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;H^2) \cap C^0(0,T;H^1) \cap C^1(0,T;L^2), \\ u_t \in L^\infty(0,T;H^1),\, u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,\cdot),\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T). \end{cases} \tag{8}$$

Mặt khác, từ (7) ta cũng nhận thấy rằng $u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2) \subset L^2(Q_T)$, và do đó $u \in H^2(Q_T)$. Từ đó nếu $(u_0, u_1) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ thì nghiệm yếu u sẽ thuộc vào không gian hàm $H^2(Q_T) \cap L^\infty(0,T;H^2)$. Và nghiệm như thế một phần nào khá giống với nghiệm cổ điển thuộc $C^2(\overline{Q_T})$, vì dữ kiện đầu (u_0, u_1) không cần thiết thuộc về $C^2(\overline{\Omega}) \times C^1(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Phần chứng minh của định lí 2 gồm 4 bước. Chứng minh dựa vào phương pháp Galerkin liên hệ với các đánh giá tiên nghiệm, từ đó rút ra được các dãy con hội tụ yếu về nghiệm trong các không gian hàm thích hợp nhờ một số các phép nhúng compact.

Chú thích 3. Trong trường hợp $p_0,\ p_1 > 2$ và $K_0 < 0$ hoặc $K_1 < 0,$ sự tồn tại nghiệm của bài toán (1)-(4) vẫn là câu hỏi mở.

3. Khai triển tiệm cận theo 4 tham số

Trong phần này, ta kí hiệu u_0, u_1 bởi $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1,$ lần lượt. Giả sử $q_0 = q_1 = 2,\ p_0,\ p_1 \geq N+1,\ N \geq 2,\ \lambda_0 = \lambda_1 = 1,$ và $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, F, \mu, g)$ thỏa mãn các giả thiết $(H_1)-(H_4)$. Với $(\mathrm{K}, \lambda, \mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3,$ theo Định lí 1, bài toán (1)-(4) có duy nhất một nghiệm yếu u phụ thuộc $(K, \lambda, K_0, K_1):\ u = u(K, \lambda, K_0, K_1).$

Xét bài toán nhiễu sau, trong đó K, λ, K_0, K_1 là các tham số bé, $0 \leq \mathrm{K} \leq \mathrm{K}_*,\ 0 < \lambda \leq \lambda_*,\ 0 \leq K_0 \leq K_{0*},\ 0 \leq K_1 \leq K_{1*}:$

$$(\tilde{P}_{K,\lambda,K_0,K_1})\ \begin{cases} Au \equiv u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = -Ku - \lambda u_t + F(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ u_x(0,t) = K_0 H_{p_0}(u(0,t)) + u_t(0,t) + g(t), \\ -u_x(1,t) = K_1 H_{p_1}(u(1,t)) + u_t(1,t), \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases}$$

trong đó $H_p(z) = |z|^{p-2}z,\ p \in \{p_0, p_1\}.$

Với mỗi đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \in Z_+^4$ và vectơ $\vec{\mathrm{K}} = (\mathrm{K}, \lambda, \mathrm{K}_0, \mathrm{K}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3,$ ta đặt

$$\begin{cases} |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,\ \gamma! = \gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!\gamma_4!, \\ \|\vec{K}\| = \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_0^2 + K_1^2},\ \vec{K}^\gamma = K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2}K_0^{\gamma_3}K_1^{\gamma_4}, \\ \alpha, \beta \in Z_+^4,\ \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i,\ \forall i = 1, 2, 3, 4, \\ C_\alpha^\beta = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}. \end{cases}$$

Trước tiên, ta có bổ đề sau và chi tiết chứng minh có thể xem trong [11] hoặc [13].

Bổ đề 1. *Cho* $m, N \in \mathbb{N}$ *và* $v_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in Z_+^4$, $1 \le |\alpha| \le N$. *Khi đó,*

$$\left(\sum_{1 \le |\alpha| \le N} v_\alpha \vec{K}^\alpha \right)^m = \sum_{m \le |\alpha| mN} T^{(m)}[v]_\alpha \vec{K}^\alpha, \tag{9}$$

trong đó hệ số $T^{(m)}[v]_\alpha$, $m \le |\alpha| \le mN$ *phụ thuộc vào* $v = (v_\alpha)$, $\alpha \in Z_+^4$, $1 \le |\alpha| \le N$ *thỏa mãn công thức qui nạp sau*

$$\begin{cases} T^{(1)}[v]_\alpha = v_\alpha, 1 \le |\alpha| \le N, \\ T^{(m)}[v]_\alpha = \sum\limits_{\beta \in I_\alpha^{(m)}} v_{\alpha-\beta} T^{(m-1)}[v]_\beta, m \le |\alpha| \le mN, m \ge 2, \\ I_\alpha^{(m)} = \left\{ \beta \in Z_+^4 : \beta \le \alpha, 1 \le |\alpha - \beta| \le N, m-1 \le |\beta| \le (m-1)N \right\}. \end{cases} \tag{10}$$

Gọi $u_0 \equiv u_{0,0,0,0}$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_{0,0,0,0})$ như trong Định lí 1, tương ứng với $(K, \lambda, K_0, K_1) = (0,0,0,0)$, i.e.,

$$(\tilde{P}_{0,0,0,0}) \begin{cases} Au_0 = F_{0,0,0} \equiv F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_x(0,t) = u_0'(0,t) + g(t), \quad -u_x(1,t) = u_1'(1,t), \\ u_0(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_0'(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ u_0 \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_0' \in L^\infty(0,T;L^2),\ u_0(0,\cdot),\ u_0(1,\cdot) \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Ta xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu u_γ, $\gamma \in Z_+^4$, $1 \le |\gamma| \le N$, xác định bởi các bài toán sau

$$(\tilde{P}_\gamma) \begin{cases} Au_\gamma = F_\gamma,\ 0 < x < 1,\ \ 0 < t < T, \\ u_{\gamma x}(0,t) = \hat{P}_\gamma(t) + u_\gamma'(0,t), \\ -u_{\gamma x}(1,t) = \hat{Q}_\gamma(t) + u_\gamma'(1,t), \\ u_\gamma(x,0) = u_\gamma'(x,0) = 0, \\ u_\gamma \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_\gamma' \in L^\infty(0,T;L^2),\ u_\gamma(0,\cdot),\ u_\gamma(1,\cdot) \in H^1(0,T), \end{cases}$$

trong đó $F_\gamma, \hat{P}_\gamma, \hat{Q}_\gamma, |\gamma| \le N$, được xác định bởi công thức qui nạp sau

$$F_\gamma = \begin{cases} F, & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ -u_{\gamma_1, \gamma_2 - 1, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 \ge 1,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ -u_{\gamma_1 - 1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 \ge 1,\ \gamma_2 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ -u_{\gamma_1 - 1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4} - u_{\gamma_1, \gamma_2 - 1, \gamma_3, \gamma_4}, & \gamma_1 \ge 1,\ \gamma_2 \ge 1,\ 2 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \tag{11}$$

$$\hat{P}_\gamma(t) = \begin{cases} g(t), & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_3 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ H_{p_0}\big(u_0(0,t)\big), & \gamma_3 = 1,\ |\gamma| = 1, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{|\gamma|-1} \frac{1}{m!} H_{p_0}^{(m)}\big(u_0(0,t)\big) T^{(m)}[u(0,t)]_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - 1, \gamma_4}, & \gamma_3 \ge 1,\ 2 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \tag{12}$$

$$\hat{Q}_\gamma(t) = \begin{cases} 0, & \gamma_4 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ H_{p_1}\big(u_0(1,t)\big), & \gamma_4 = 1,\ |\gamma| = 1, \\ \displaystyle\sum_{m=1}^{|\gamma|-1} \frac{1}{m!} H_{p_1}^{(m)}\big(u_0(1,t)\big) T^{(m)}[u(1,t)]_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 - 1}, & \gamma_4 \ge 1,\ 2 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \tag{13}$$

ở đây, ta kí hiệu $u = (u_\gamma),\ |\gamma| \le N$. Gọi $u = u(K, \lambda, K_0, K_1)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\tilde{P}_{K,\lambda,K_0,K_1})$. Khi đó, $v = u - \sum_{|\gamma| \le N} u_\gamma \vec{K}^\gamma$ thỏa bài toán

$$\begin{cases} Av = -Kv - \lambda v' + \tilde{E}_{N,\vec{K}}(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v_x(0,t) = R(t),\ -v_x(1,t) = S(t), \\ v(x,0) = v'(x,0) = 0, \\ R(t) = K_0\big[H_{p_0}[(v+h)(0,t)] - H_{p_0}[h(0,t)]\big] + v'(0,t) + \tilde{E}_{0N,\vec{K}}(t), \\ S(t) = K_1\big[H_{p_1}[(v+h)(1,t)] - H_{p_1}[h(1,t)]\big] + v'(1,t) + \tilde{E}_{1N,\vec{K}}(t), \\ v \in L^\infty(0,T;H^1),\ v' \in L^\infty(0,T;L^2),\ v(0,\cdot),\ v(1,\cdot) \in H^1(0,T), \end{cases} \tag{14}$$

trong đó

$$\begin{cases} h = \sum_{|\gamma|\le N} u_\gamma \vec{K}^\gamma, \\ \widetilde{E}_{N,\vec{K}}(x,t) = -\sum_{|\gamma|=N} (Ku_\gamma + \lambda u_\lambda^{/})\vec{K}^\gamma, \\ \widetilde{E}_{0N,\vec{K}}(t) = K_0 H_{p_0}\left[h(0,t)\right] - \sum_{1\le|\gamma|\le N} \hat{P}_\gamma(t)\vec{K}^\gamma, \\ \widetilde{E}_{1N,\vec{K}}(t) = K_1 H_{p_1}\left[h(1,t)\right] - \sum_{1\le|\gamma|\le N} \hat{Q}_\gamma(t)\vec{K}^\gamma. \end{cases} \tag{15}$$

Khi đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 2. *Giả sử* $p_0,\ p_1 \ge N+1,\ N \ge 2,\ q_0 = q_1 = 2,\ \ \lambda_0 = \lambda_1 = 1,$ *và* $(H_1)-(H_4)$ *đúng. Khi đó*

$$\begin{cases} \left\|\widetilde{E}_{N,\vec{K}}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{C}_N \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \\ \left\|\widetilde{E}_{0N,\vec{K}}\right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{C}_{0N} \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \\ \left\|\widetilde{E}_{1N,\vec{K}}\right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{C}_{1N} \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \end{cases} \tag{16}$$

với mọi $\vec{\mathrm{K}} = \left(\mathrm{K},\lambda,\mathrm{K}_0,\mathrm{K}_1\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3,$ *với* $0 \le \mathrm{K} \le \mathrm{K}_*,\ 0 < \lambda \le \lambda_*,\ 0 \le \mathrm{K}_0 \le \mathrm{K}_{0*},$ $0 \le K_1 \le K_{1*},$ *trong đó* $\widetilde{C}_N, \widetilde{C}_{0N}, \widetilde{C}_{1N}$ *là các hằng số chỉ tùy thuộc vào các hằng số* $K_*,\ \lambda_*,\ K_{0*},\ K_{1*},\ \left\|u_\gamma\right\|_{L^\infty(0,T;H^1)},\ \left\|u_\gamma^{/}\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)},\ |\gamma| \le N.$

Chứng minh bổ đề 2. Dùng khai triển Taylor của hàm H_{p_0}, H_{p_1} tại u_0 đến cấp $N,$ sau một số bước đánh giá, ta thu được (16). □

Kết quả sau đây cho một khai triển tiệm cận của nghiệm u của bài toán (1)-(4) đến cấp $N+1$ theo bốn tham số bé $K,\ \lambda,\ K_0,\ K_1.$

Định lí 3. *Giả sử* $p_0,\ p_1 \ge N+1,\ N \ge 2,\ q_0 = q_1 = 2,\ \ \lambda_0 = \lambda_1 = 1,$ *và* $(H_1)-(H_4)$ *đúng. Khi đó, với mỗi* $\vec{\mathrm{K}} = \left(\mathrm{K},\lambda,\mathrm{K}_0,\mathrm{K}_1\right) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3,$ *với* $0 \le \mathrm{K} \le \mathrm{K}_*,\ 0 < \lambda \le \lambda_*,$ $0 \le K_0 \le K_{0*},\ \ 0 \le K_1 \le K_{1*},$ *bài toán* $(\widetilde{P}_{K,\lambda,K_0,K_1})$ *có duy nhất một nghiệm yếu* $u = u(K,\ \lambda,\ K_0,\ K_1)$ *thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp* $N+1$ *như sau*

$$\left\| u' - \sum_{|\gamma|\le N} u'_\gamma \vec{K}^\gamma \right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\| u - \sum_{|\gamma|\le N} u_\gamma \vec{K}^\gamma \right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} + \left\| u'(0,\cdot) - \sum_{|\gamma|\le N} u'_\gamma(0,\cdot)\vec{K}^\gamma \right\|_{L^2(0,T)} + \left\| u'(1,\cdot) - \sum_{|\gamma|\le N} u'_\gamma(1,\cdot)\vec{K}^\gamma \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}_N^* \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \tag{17}$$

với mọi $\vec{K} = (K, \lambda, K_0, K_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^3$, *với* $0 \le K \le K_*$, $0 < \lambda \le \lambda_*$, $0 \le K_0 \le K_{0*}$, $0 \le K_1 \le K_{1*}$, và $\widetilde{D}_N^*$ *là hằng số chỉ tùy thuộc vào* $K_*, \lambda_*, K_{0*}, K_{1*}$ *các hàm* u_γ, $\gamma \in Z_+^4$, $1 \le |\gamma| \le N$ *là nghiệm yếu của các bài toán* $(\widetilde{P}_\gamma)$, $\gamma \in Z_+^4$, $|\gamma| \le N$.

Chú thích 4. Trong [8], như là một trường hợp đặc biệt của bài toán (1)-(4), Long, Định, và Diễm đã thu được kết quả về khai triển tiệm cận của nghiệm theo hai tham số (K, λ) đến cấp $N+1$.

Chứng minh định lí 3. Bằng cách nhân hai vế của $(14)_1$ với v', sau đó tích phân từng phần theo t và sử dụng bổ đề 2, ta thu được

$$Z(t) \le 2\left(5\widetilde{C}_{0N}^2 + 5\widetilde{C}_{1N}^2 + T\widetilde{C}_{1N}^2\right)\left\|\vec{K}\right\|^{2N+2} + 2\left(1 + 2|K|T\right)\int_0^t Z(s)ds + 10K_0^2\int_0^t \left| H_{p_0}(v(0,s) + h(0,s)) - H_{p_0}(h(0,s))\right|^2 ds + 10K_1^2\int_0^t \left| H_{p_1}(v(1,s) + h(1,s)) - H_{p_1}(h(1,s))\right|^2 ds, \tag{18}$$

trong đó

$$Z(t) = \left\|v'(t)\right\|^2 + \mu(t)\left\|v_x(t)\right\|^2 + 2\lambda\int_0^t \left\|v'(s)\right\|^2 ds + 2\int_0^t \left(\left|v'(0,s)\right|^2 + \left|v'(1,s)\right|^2\right) ds. \tag{19}$$

Sau một số bước đánh giá và sử dụng bổ đề Gronwall, ta suy ra từ (18), (19), rằng

$$\left\|v'\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|v\right\|_{L^\infty(0,T;H^1)} + \left\|v'(0,\cdot)\right\|_{L^2(0,T)} + \left\|v'(1,\cdot)\right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}_N^* \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \tag{20}$$

với mọi $\vec{K} = (K, \lambda, K_0, K_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3_+$, với $0 \le K \le K_*$, $0 < \lambda \le \lambda_*$, $0 \le K_0 \le K_{0*}$, $0 \le K_1 \le K_{1*}$, và $\tilde{D}_N^*$ là hằng số độc lập với $\vec{K}$. Từ (20), ta suy ra đánh giá tiệm cận (17) và Định lí 3 được chứng minh. □

Chú thích 5. Trong trường hợp $\mu(t) \equiv 1$, $(u_0, u_1) \in H^2 \times H^1$, $p_1 = q_0 = q_1 = 2$, $p_0 \ge N+1$, chúng tôi cũng đã thu được một kết quả khai triển tiệm cận của nghiệm yếu u của bài toán (1)-(4) theo ba tham số K, λ, K_0 [11].

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đ.Đ. Áng, A.P.N. Định (1998), *Mixed problem for some semilinear wave equation with a nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **12**, 581 – 592.

[2]. N.T. An, N.Đ. Triều (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side,* J. Mech. NCSR. Vietnam, **13** (2), 1-7.

[3]. M. Bergounioux, N.T. Long, A.P.N. Định (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar,* Nonlinear Anal. **43**, 547-561.

[4]. J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod; Gauthier-Villar, Paris.

[5]. N.T. Long, A.P.N. Định(1992), *On the quasilinear wave equation*: $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition,* Nonlinear Anal. **19**, 613-623.

[6]. N.T. Long, A.P.N. Định (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24**, 1261-1279.

[7]. N.T. Long, T.N. Diễm(1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions,* Nonlinear Anal. **29**, 1217 -1230.

[8]. N.T. Long, A.P.N. Định, T.N. Diễm (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problem, Hindawi Publishing Corporation, No.**3**, 337-358.

[9]. N.T. Long, T.M. Thuyet (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36** (4), 915-938.

[10]. N.T. Long, V.G. Giai (2007), *A wave equation associated with mixed nonhomogeneous conditions : Global existence and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Anal. **66** (7), 1526-1546.

[11]. N.T. Long, V.G. Giai (2007), *A nonlinear wave equation associated with nonlinear boundary conditions : Existence and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Anal. **66** (12), 2852- 2880.

[12]. N.T. Long, V.G. Giai (2007), *Existence and asymptotic expansion for a nonlinear wave equation associated with nonlinear boundary conditions*, Nonlinear Anal. (accepted for publication).

[13]. N.T. Long, L.X. Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **67** (3), 842-864.

[14]. N.T. Long, L.X. Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion of solutions to a nonlinear wave equation with a memory condition at the boundary*, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. **2007**, No. 48, pp. 1-19. ISSN : 1072-6691.

[15]. N.T. Long, V.G. Giai, L.X. Truong (2007), *A shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar associated with a nonlinear boundary condition*, Demonstratio Math. Vol. **41** (accepted for publication).

Tóm tắt

Một phương trình sóng tuyến tính liên kết với điều kiện biên phi tuyến : Sự tồn tại và khai triển tiệm cận của nghiệm theo bốn tham số bé

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$(*)\quad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ \mu(t)u_x(0,t) = K_0|u(0,t)|^{p_0-2}u(0,t) + |u_t(0,t)|^{q_0-2}u_t(0,t) + g(t), \\ -\mu(t)u_x(1,t) = K_1|u(1,t)|^{p_1-2}u(1,t) + |u_t(1,t)|^{q_1-2}u_t(1,t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

trong đó $p_0, q_0, p_1, q_1 \geq 2, K, K_0, K_1, \lambda \geq 0$ là các hằng số cho trước và u_0, u_1, μ, F, g là các hàm cho trước. Bài báo gồm ba phần. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lí tồn tại duy nhất nghiệm yếu u cho bài

toán (*). Trong phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm yếu $u \in L^{\infty}(0,T;H^2)$, với $u_t \in L^{\infty}(0,T;H^1)$, $u_{tt} \in L^{\infty}(0,T;L^2)$, $u(0,\cdot)$, $u(1,\cdot) \in H^2(0,T)$, nếu ta giả sử $(u_0,u_1) \in H^2 \times H^1$, và một số điều kiện khác. Cuối cùng, trong phần 3, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm u của bài toán (*) đến cấp $N+1$ theo bốn tham số K, λ, K_0, K_1.

Abstract

A linear wave equation associated with nonlinear boundary conditions : Existence and asymptotic expansion of solutions in four small parameters

The paper deals with the initial-boundary value problem for the linear wave equation

$$(*) \quad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda u_t = F(x,t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \\ \mu(t)u_x(0,t) = K_0 |u(0,t)|^{p_0 - 2} u(0,t) + |u_t(0,t)|^{q_0 - 2} u_t(0,t) + g(t), \\ -\mu(t)u_x(1,t) = K_1 |u(1,t)|^{p_1 - 2} u(1,t) + |u_t(1,t)|^{q_1 - 2} u_t(1,t), \\ u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where $p_0, q_0, p_1, q_1 \geq 2, K, K_0, K_1, \lambda \geq 0$ are given constants and u_0, u_1, μ, F, g are given functions. The paper consists of three parts. In Part 1, we prove a theorem of existence and uniqueness of a weak solution u of problem (*). In Part 2, we prove that the weak solution $u \in L^{\infty}(0,T;H^2)$, with $u_t \in L^{\infty}(0,T;H^1)$, $u_{tt} \in L^{\infty}(0,T;L^2)$, $u(0,\cdot)$, $u(1,\cdot) \in H^2(0,T)$, if we assume $(u_0,u_1) \in H^2 \times H^1$, and some others. Finally, in Part 3 we obtain an asymptotic expansion of the solution u of the problem (*) up to order $N+1$ via four small parameters K, λ, K_0, K_1.