HỆ BẤT BIẾN CỦA MỘT LỚP CON CÁC ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC 4, 5 CHIỀU

Lê Anh Vũ*, Trần Minh Hải†, Lê Thị Thu Trang‡

1. Mở đầu

Trong các năm 1990-1992, tác giả thứ nhất đã nghiên cứu lớp MD4 (xem [**6**], [**7**]). Vài năm gần đây, tác giả thứ nhất cùng các cộng sự Nguyễn Công Trí, Dương Minh Thành, Dương Quang Hòa tiếp tục nghiên cứu lớp MD5 trong các công trình [**8**], [**9**], [**10**], [**11**], [**12**], [**13**]. Lý do và ý nghĩa của việc nghiên lớp MD đã được giải thích rõ trong các công trinh đó.

Gần đây, năm 2006, các nhà Toán học V. Boyko, J. Patera và R. Popovych ([**20**]) giới thiệu một phương pháp hiệu quả để tính các bất biến của đại số Lie số chiều thấp. Khác với phương pháp trước đây, phương pháp này thay việc giải một hệ phương trình vi phân phức tạp bằng các phép tính thuần túy đại số. Từ đây, một cách tự nhiên nảy sinh ra bài toán: *tính hệ bất biến của các MD-đại số đã biết* bằng phương pháp của Boyko, Patera và Popovych.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ dùng phương pháp của V. Boyko, J. Patera và R. Popovych để tính toán tường minh hệ bất biến của toàn bộ các MD4-đại số bất khả phân và các MD5-đại số bất khả phân với ideal dẫn xuất giao hoán (mục 3). Vì khối lượng tính toán nhiều và có sử dụng phần mềm chuyên dụng **Matlab** nên sau khi giới thiệu tóm tắt phương pháp của V. Boyko, J. Patera và R. Popovych , chúng tôi chỉ liệt kê hệ bất biến của các MD-đại số được xét mà không trình bày chi tiết các tính toán cụ thể.

2. Một số khái niệm và tính chất cơ bản

2.1. Biểu diễn phụ hợp và K–biểu diễn

2.1.1. K–biểu diễn của một nhóm Lie

* PGS.TS. – Trường ĐHSP Tp. HCM.
† ThS. – Trường THPT Phan Bội Châu, Bình Thuận.
‡ ThS. – Trường THPT Nguyễn Huệ, Tây Ninh.

Giả sử G là một nhóm Lie tùy ý, $\mathcal{G}$ là đại số Lie của nó. Xét tác động $Ad: G \to GL(\mathcal{G})$ của G lên $\mathcal{G}$ được định nghĩa như sau:

$$Ad(g) = \left(L_g . R_{g^{-1}}\right)_* : \mathcal{G} \to \mathcal{G},\ \forall g \in G,$$

trong đó L_g (tương ứng $R_{g^{-1}}$) là phép tịnh tiến trái (tương ứng, phải) của G theo phần tử $g \in G$ (tương ứng, $g^{-1} \in G$). Tác động *Ad* còn gọi là *biểu diễn phụ hợp* của G trong $\mathcal{G}$.

Ký hiệu $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của đại số Lie $\mathcal{G}$. Khi đó biểu diễn *Ad* cảm sinh ra tác động $K=Ad^*: G \to GL(\mathcal{G}^*)$ của G lên $\mathcal{G}^*$ như sau:

$$\langle K(g)f, X\rangle = \langle f, Ad(g^{-1})X\rangle, \forall X \in \mathcal{G}, \forall f \in \mathcal{G}^*,\ \forall g \in G,$$

ở đây ký hiệu $\langle f, X\rangle$ chỉ giá trị của dạng tuyến tính $f \in \mathcal{G}^*$ tại trường vectơ (bất biến trái) $X \in \mathcal{G}$. Tác động *K* được gọi là *biểu diễn đối phụ hợp* hay *K–biểu diễn* của G trong $\mathcal{G}^*$. Mỗi quỹ đạo ứng với K–biểu diễn được gọi là *K–quỹ đạo* hay *quỹ đạo Kirillov* của G (trong $\mathcal{G}^*$).

Mỗi K–quỹ đạo của G luôn là một G–đa tạp vi phân thuần nhất với số chiều chẵn và trên đó có thể đưa vào một cấu trúc symplectic tự nhiên tương thích với tác động của G.

Ký hiệu O(G) là tập hợp các K–quỹ đạo của G và trang bị trên đó tôpô thương của tôpô tự nhiên trong $\mathcal{G}^*$. Nói chung thì tôpô thu được khá "xấu", nó có thể không tách, thậm chí không nửa tách.

2.2. Các MD–nhóm và MD–đại số

Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được $\mathcal{G}$ là đại số Lie của G và $\mathcal{G}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$.

Nhóm G được gọi là có *tính chất MD* hay là *MD–nhóm* nếu các K–quỹ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có số chiều cực đại. Trường hợp số chiều cực đại đúng bằng số chiều của nhóm thì nhóm G được gọi là có tính chất $\overline{MD}$ hay còn gọi là $\overline{MD}$*–nhóm*. Đại số Lie thực giải được $\mathcal{G}$ ứng với MD–nhóm (tương ứng, $\overline{\mathrm{MD}}$–nhóm) được gọi là *MD–đại số* (tương ứng, $\overline{MD}$*–đại số*).

2.3. Khái niệm về các bất biến của một đại số Lie

Xét đại số Lie G có số chiều dimG = $n < \infty$ trên trường □ hoặc □, nhóm Lie liên thông tương ứng *G* và không gian đối ngẫu G* của không gian vectơ G.

Bất kỳ cơ sở (cố định) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ của G cũng đều thỏa mãn các hệ thức $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, trong đó c_{ij}^k $(i, j, k = \overline{1, n})$ là các thành phần tensor của các hằng số cấu trúc của G trong cơ sở đã chọn.

Ảnh Ad_G của *G* bởi tác động phụ hợp *Ad* là nhóm tự đẳng cấu trong *Int*(G) của đại số Lie G. Ảnh của *G* bởi tác động đối phụ hợp $K = Ad^*$ là nhóm con của GL(G*) và được ký hiệu bởi Ad_G^* hay $K(G)$. Một hàm $F \in C^\infty(\mathrm{G}^*)$ được gọi là *bất biến* của Ad_G^* nếu

$$F\left(Ad_g^* f\right) = F(f), \ \forall g \in G, \ f \in \mathrm{G}^*.$$

Đặt $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là tọa độ của x trong G* trong cơ sở đối ngẫu của cơ sở $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Bất biến bất kỳ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của Ad_G^* là nghiệm của hệ phương trình đạo hàm riêng cấp một (xem [**2**] và [**3**])

$$X_i F = 0, \text{ nghĩa là } c_{ij}^k x_k F_{x_j} = 0, \qquad (1)$$

trong đó $X_i = c_{ij}^k x_k \partial_{x_j}$ là phần tử sinh hữu hạn của nhóm 1- tham số $\left\{Ad_G^*(\exp \varepsilon e_i)\right\}$ tương ứng với e_i. Mỗi ánh xạ $e_i \rightarrow X_i$ cho ta một biểu diễn của đại số Lie G.

Số dương lớn nhất N_G của các hàm bất biến độc lập $F^l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $l = 1, \ldots, N_G$, là số nghiệm độc lập của hệ (1) (xem [**3**] và [**17**]) và nó chính là số phần tử cơ sở của các hàm bất biến của Ad_G^*. Số này được cho bởi hiệu

$$N_G = \dim\mathrm{G} - \mathrm{rank}\mathrm{G}, \qquad (2)$$

ở đây

$$\mathrm{rank}\mathrm{G} = \sup_{(x_1, \ldots, x_n)} \mathrm{rank}\left(c_{ij}^k x_k\right)_{i,j=1}^n.$$

Cho bất biến bất kỳ $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của Ad_G^*, chúng ta tìm bất biến tương ứng của đại số Lie G bằng cách đối xứng hóa, Sym$F(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, của F. Nó thường được gọi là toán tử Casimir tổng quát của G. Nếu F là đa thức, Sym$F(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ gọi là toán tử Casimir thông thường. Chính xác hơn, toán tử đối xứng hóa Sym chỉ tác động trên các đơn thức dạng $e_{i_1}.e_{i_2}...e_{i_r}$ gồm các phần tử không giao hoán trong số $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_r}$, và được định nghĩa bởi công thức

$$[\mathrm{Sym}](e_{i_1}...e_{i_r}) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r} e_{i_{\sigma_1}}...e_{i_{\sigma_r}},$$

trong đó $i_1, i_2, \ldots, i_r$ lấy các giá trị từ 1 đến n, $r \in \mathbb{N}$, S_r là số các hoán vị của nhóm gồm r phần tử.

Tập các bất biến của Ad_G^* và G lần lượt được ký hiệu bởi $Inv(Ad_G^*)$ và Int(G). Một tập các hàm bất biến độc lập $F^l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $l = 1, \ldots, N_G$, tạo thành một cơ sở hàm (bất biến cơ bản) của $Inv(Ad_G^*)$. Vì vậy, tập các Sym$F^l(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $l = 1, \ldots, N_G$, được gọi là cơ sở của Inv(G).

3. Tính hệ bất biến của các MD4 và MD5- đại số bằng phương pháp Boyko – Patera – Popovych

3.1. Thuật toán tính các bất biến

Phương pháp cơ bản của việc xây dựng các toán tử Casimir tổng quát là phép lấy tích phân của hệ phương trình vi phân tuyến tính (1), nhưng việc tính toán theo phương pháp này khá phức tạp. Phương pháp đại số hóa sử dụng trong quá trình tính toán hệ bất biến của các đại số Lie của Boyko – Patera – Popovych (xem [**20**]) mà chúng tôi tóm tắt dưới đây đơn giản hơn nhiều.

Bước 1: Xây dựng ma trận $B(\theta)$ của Ad_G^*

Ma trận $B(\theta)$ được tính toán từ các hằng số cấu trúc của đại số Lie bằng ánh xạ mũ với $B(\theta) = \prod_{i=1}^{r} \exp\left(-\theta_i \,\mathrm{ad}_{e_{n-r+i}}\right)$. Ma trận là ma trận của phép tự đẳng cấu trong của đại số Lie G trong cơ sở đã cho $e_1, \ldots, e_n$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$ là nhóm các tham số (tọa độ) của Int(G), Z(G) là tâm của G và

$r = \dim \mathrm{Ad}_G^* = \dim Int(G) = n - \dim Z(G)$. Ở đây $e_1, ..., e_{n-r}$ được xem như là một cơ sở của Z(G); ad_u là biểu diễn phụ hợp của $u \in G$ trong GL(G): $ad_u w = [u, w], \forall w \in G$, còn ma trận của ad_u đối với cơ sở $e_1, ..., e_n$ được kí hiệu là $\tilde{ad}_u$. Đặc biệt, $\tilde{ad}_{e_i} = \left(c_{ij}^k\right)_{j,k=1}^n$.

Khi n = dimG là một số nguyên nhỏ thì việc tính toán hoàn toàn không phức tạp. Thời gian tính toán về cơ bản phụ thuộc vào việc lựa chọn cơ sở của đại số Lie G.

Bước 2: Xây dựng các phép biến đổi hữu hạn

Các phép biến đổi từ Ad_G^* có thể được trình bày theo dạng tọa độ như sau:

$$\left(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n\right) = \left(x_1, ..., x_n\right).B\left(\theta_1, ..., \theta_r\right), \tag{3}$$

hoặc ngắn gọn $\tilde{x} = x.B(\theta)$. Vế phải $x.B(\theta)$ của đẳng thức (3) là dạng chi tiết của bất biến nâng cơ bản I của Ad_G^* với hệ tọa độ đã chọn (θ, x) trong $Ad_G^* \times G^*$.

Bước 3: Khử các tham số trong hệ (3)

Hệ phương trình hệ quả của (3) có đúng N_G phương trình đại số độc lập đối với tham số của θ (xem [Fe-Olv1] và [Fe-Olv2]). Chúng có thể được viết dưới dạng:

$$F^l\left(\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n\right) = F^l\left(x_1, ..., x_n\right),\ l = 1, ..., N_G.$$

Bước 4: Đối xứng hóa

Các hàm $F^l\left(x_1, ..., x_n\right)$ mà tạo thành cơ sở của $Inv\left(Ad_G^*\right)$ được đối xứng hóa thành $SymF^l\left(e_1, ..., e_n\right)$, chính là cơ sở của $Inv(G)$.

3.2. Hệ bất biến của các MD4-đại số bát khả phân và các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán

Áp dụng phương pháp nêu trên, tính toán trực tiếp với sự hỗ trợ của phần mềm chuyên dụng **Matlab** chúng tôi nhận được hệ bất biến của toàn bộ các các MD4-đại số bất khả phân và các MD5-đại số bất khả phân với ideal dẫn xuất giao hoán. Do có khá nhiều các MD4 và MD5-đại số, hơn nữa khuôn khổ bài báo lại hạn chế, chúng tôi sẽ không liệt kê lại các MD-đại số này mà đề nghị bạn đọc tham khảo trong các tài liệu [**7**], [**13**] của tác giả thứ nhất.

Bảng 1: liệt kê các bất biến của các MD4 – đại số bất khả phân

MD4–đại số	**Các hoán tử khác 0**	**Các bất biến**
$G^1 = \langle X_3 \rangle \equiv \mathbb{R}$		
$G_{4,1,1}$	$[X_4, X_1] = X_3$	X_2, X_3
$G_{4,1,2}$	$[X_4, X_3] = X_3$	X_1, X_2
$G^1 = \langle X_2, X_3 \rangle \equiv \mathbb{R}^2$ $[X_4, X_1] = 0, ad_{X_1} \in Mat_2(\mathbb{R}), ad_{X_4} \in GL_2(\mathbb{R})$		
$G_{4,2,1(\lambda)}$	$[X_4, X_2] = \lambda X_2; [X_4, X_3] = X_3$	$X_1, \dfrac{X_2}{X_3{}^{\lambda}}$
$G_{4,2,2}$	$[X_4, X_2] = X_2; [X_4, X_3] = X_2 + X_3$	$X_1,\ \dfrac{1}{X_2}\exp\left(\dfrac{X_3}{X_2}\right)$
$G_{4,2,3(\varphi)}$	$[X_4, X_2] = X_2.\cos\varphi - X_3.\sin\varphi$ $[X_4, X_3] = X_2.\sin\varphi + X_3.\cos\varphi$	$X_1, \dfrac{1}{\left(X_2{}^2 + X_3{}^2\right)^{\sin\varphi}} \exp\left(-2\cos\varphi.\arctan\dfrac{X_2}{X_3}\right)$
$G_{4,2,4}$	$[X_1, X_2] = -X_3; [X_1, X_3] = X_2; [X_4, X_2] = X_2$ $[X_4, X_3] = X_3$	Không có
$G^1 = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle \equiv \mathbb{R}^3$, $ad_{X_4} \in GL_3(\mathbb{R})$		
$G_{4,3,1(\lambda_1,\lambda_2)}$	$[X_4, X_1] = \lambda_1 X_1; [X_4, X_2] = \lambda_2 X_2; [X_4, X_3] = X_3$	$\dfrac{(\tilde{x}_3)^{\lambda_1}}{\tilde{x}_1} = \dfrac{(x_3)^{\lambda_1}}{x_1},\ \dfrac{(\tilde{x}_3)^{\lambda_2}}{\tilde{x}_2} = \dfrac{(x_3)^{\lambda_2}}{x_2}$
$G_{4,3,2(\lambda)}$	$[X_4, X_1] = \lambda X_1; [X_4, X_2] = X_1 + \lambda X_2$ $[X_4, X_3] = X_3$	$\dfrac{1}{X_3}\exp\left(\dfrac{X_2}{X_1}\right), \dfrac{1}{X_1}\exp\left(\dfrac{\lambda X_2}{X_1}\right)$
$G_{4,3,3}$	$[X_4, X_1] = X_1; [X_4, X_2] = X_1 + X_2;$ $[X_4, X_3] = X_2 + X_3$	$\dfrac{1}{X_1}\exp\left(\dfrac{X_2}{X_1}\right), \dfrac{X_3}{X_1} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_2}{X_1}\right)^2$
$G_{4,3,4(\lambda,\varphi)}$	$[X_4, X_1] = X_1\cos\varphi - X_2\sin\varphi$ $[X_4, X_2] = X_1\sin\varphi + X_2\cos\varphi$ $[X_4, X_3] = \lambda X_3$	$\dfrac{1}{(X_3)^{\sin\varphi}}\exp\left(\lambda\arctan\dfrac{X_2}{X_1}\right)$
$G^1 = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle \equiv h^3$ **(Đại số Lie Heisenberg 3 chiều)** $[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = [X_2, X_3] = 0, ad_{X_4} \in Mat_3(\mathbb{R})$		
$G_{4,4,1}$	$[X_4, X_1] = -X_2; [X_4, X_2] = X_1$	$X_3, X_1{}^2 + X_2{}^2 - (X_3X_4 + X_4X_3)$
$G_{4,4,2}$	$[X_4, X_1] = -X_1; [X_4, X_2] = X_2$	$X_3, \left(\dfrac{X_1X_2 + X_2X_1}{2}\right) - \left(\dfrac{X_3X_4 + X_4X_3}{2}\right)$

Bảng 2: liệt kê hệ bất biến của các MD5 – đại số

MD5–đại số		**Các bất biến**
$G^1 = \langle X_5 \rangle \equiv \mathbb{R}$.		
$G_{5,1}$	$[X_1, X_2] = X_5$; $[X_3, X_4] = X_5$	X_5
$G^1 = \langle X_4, X_5 \rangle \equiv \mathbb{R}^2$		
$G_{5,2,1}$	$[X_1, X_2] = X_4$; $[X_2, X_3] = X_5$	$X_4,\ X_5,\ \dfrac{X_1X_5 + X_5X_1 + X_3X_4 + X_4X_3}{2}$
$G_{5,2,2(\lambda)}$	$[X_1, X_2] = [X_3, X_4] = X_5$; $[X_2, X_3] = \lambda X_4$ $(\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.	X_5
$G^1 = \langle X_3, X_4, X_5 \rangle \equiv \mathbb{R}^3$; $ad_{X_i} \in End(G^1) \equiv Mat_3(\mathbb{R}),\ i = 1,\ 2;\ [X_1, X_2] = X_3.$		
$G_{5,3,1(\lambda_1,\lambda_2)}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$	$\dfrac{X_4^{\lambda_1}}{X_3^{\lambda_2}},\ \dfrac{X_5^{\lambda_1}}{X_3},\ \lambda_1 X_1 + X_3.$
$G_{5,3,2(\lambda)}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$	$\dfrac{X_4}{X_3},\ \dfrac{X_5}{X_3^{\lambda}},\ X_1 + X_3$
$G_{5,3,3(\lambda)}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$	$\lambda \neq 0: \dfrac{X_5}{X_4},\ \dfrac{X_4^{\lambda}}{X_3},\ X_3 + \lambda X_1$ $\lambda = 0: X_3,\ \dfrac{X_5}{X_4},\ X_4 \exp\left(\dfrac{X_1}{X_3}\right)$
$G_{5,3,4}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$	$\dfrac{X_5}{X_4},\ \dfrac{X_4}{X_3},\ X_3 + X_1.$
$G_{5,3,5(\lambda)}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$	$\lambda \neq 0: \dfrac{X_4^{\lambda}}{X_3},\ X_3 + \lambda X_1,\ \dfrac{1}{X_4} \exp\left(\dfrac{X_5}{X_4}\right)$ $\lambda = 0: X_3,\ X_4 \exp\left(\dfrac{X_1}{X_3}\right),\ \dfrac{X_5}{X_4} + \dfrac{X_1}{X_3}$
$G_{5,3,6(\lambda)}$	$ad_{X_1} = 0;\ ad_{X_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$	$\dfrac{X_5}{X_3^{\lambda}},\ X_1 + X_3,\ \dfrac{1}{X_3} \exp\left(\dfrac{X_4}{X_3}\right)$

$G_{5,3,7}$	$ad_{X_1}=0;\ ad_{X_2}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$	$X_3+X_1,\ \frac{1}{X_3}\exp\left(\frac{X_4}{X_3}\right),\ \frac{X_5}{X_3}-\frac{1}{2}\left(\frac{X_4}{X_3}\right)^2$
$G_{5,3,8(\lambda,\varphi)}$	$ad_{X_1}=0;\ ad_{X_2}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix};$ $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ \varphi\in(0,\pi).$	$\frac{X_3}{\cos\left(\arctan\frac{X_4}{X_3}\right)}\exp\left(\cot\varphi.\arctan\frac{X_4}{X_3}\right),$ $X_5\exp\left(\frac{\lambda}{\sin\varphi}.\arctan\frac{X_4}{X_3}\right),\ X_1+X_3\cos\varphi-X_4\sin\varphi.$
$G^1=\langle X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5\rangle\equiv\mathbb{R}^4;$ $ad_{X_1}\in End(G^1)\equiv Mat_4(\mathbb{R}).$		
$G_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}$	$ad_{X_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$ $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3\neq\lambda_1.$	$\frac{X_3^{\lambda_1}}{X_2^{\lambda_2}},\ \frac{X_4^{\lambda_1}}{X_2^{\lambda_3}},\ \frac{X_5^{\lambda_1}}{X_2}$
$G_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}$	$ad_{X_1}=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};$ $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\},\ \lambda_1\neq\lambda_2.$	$\frac{X_3^{\lambda_1}}{X_2^{\lambda_2}},\ \frac{X_4^{\lambda_1}}{X_2},\ \frac{X_5^{\lambda_1}}{X_2}$
$G_{5,4,3(\lambda)}$	$ad_{X_1}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$	$\frac{X_3}{X_2},\ \frac{X_4^{\lambda}}{X_2},\ \frac{X_5^{\lambda}}{X_2}$
$G_{5,4,4(\lambda)}$	$ad_{X_1}=\begin{pmatrix}\lambda&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}.$	$\frac{X_3^{\lambda}}{X_2},\ \frac{X_4^{\lambda}}{X_2},\ \frac{X_5^{\lambda}}{X_2}$
$G_{5,4,5}$	$ad_{X_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$	$\frac{X_3}{X_2},\ \frac{X_4}{X_2},\ \frac{X_5}{X_2}$

$G_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\},\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$	$\dfrac{X_3^{\lambda_1}}{X_2^{\lambda_2}},\ \dfrac{X_4^{\lambda_1}}{X_2},\ \dfrac{1}{X_4}\exp\left(\dfrac{X_5}{X_4}\right)$
$G_{5,4,7(\lambda)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$	$\dfrac{X_3}{X_2},\ \dfrac{X_4^{\lambda}}{X_2},\ \dfrac{1}{X_4}\exp\left(\dfrac{X_5}{X_4}\right)$
$G_{5,4,8(\lambda)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$	$\dfrac{X_4^{\lambda}}{X_2},\ \dfrac{1}{X_4}\exp\left(\dfrac{X_3}{X_2}\right),\ \dfrac{X_5}{X_4} - \dfrac{X_3}{X_2}.$
$G_{5,4,9(\lambda)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}.$	$\dfrac{X_3^{\lambda}}{X_2},\ \dfrac{1}{X_3}\exp\left(\dfrac{X_4}{X_3}\right),\ \dfrac{X_5}{X_3} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_4}{X_3}\right)^2$
$G_{5,4,10}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\dfrac{1}{X_2}\exp\left(\dfrac{X_3}{X_2}\right),\ \dfrac{X_4}{X_2} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{X_3}{X_2}\right)^2,$ $\dfrac{X_5}{X_2} - \dfrac{X_4.X_3 + X_3.X_4}{2X_2^2} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{X_3}{X_2}\right)^3$
$G_{5,4,11(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$ $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in (0,\pi).$	$\dfrac{X_5^{\lambda_1}}{X_4^{\lambda_2}},\ X_4\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\sin\varphi}\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right),$ $\dfrac{X_2}{\cos\left(\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right)}\exp\left(\cot\varphi.\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right).$
$G_{5,4,12(\lambda,\varphi)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in (0,\pi).$	$\dfrac{X_5}{X_4},\ X_4\exp\left(\dfrac{\lambda}{\sin\varphi}\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right),$ $\dfrac{X_2}{\cos\left(\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right)}\exp\left(\cot\varphi.\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right).$
$G_{5,4,13(\lambda,\varphi)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix};$ $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in (0,\pi).$	$\dfrac{1}{X_4}\exp\left(\lambda\dfrac{X_5}{X_4}\right),$ $\dfrac{X_2}{\cos\left(\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right)}\exp\left(\cot\varphi.\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right),$ $\dfrac{X_5}{X_4} + \dfrac{1}{\sin\varphi}\arctan\dfrac{X_3}{X_2}.$

$G_{5,4,14(\lambda,\mu,\varphi)}$	$ad_{X_1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{pmatrix}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \mu > 0,\ \varphi \in (0, \pi)$.	$\dfrac{X_4}{\cos\left(\arctan\dfrac{X_5}{X_4}\right)} \exp\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\arctan\dfrac{X_5}{X_4}\right)$, $\dfrac{X_2}{\cos\left(\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right)} \exp\left(\cot\varphi.\arctan\dfrac{X_3}{X_2}\right)$, $\dfrac{1}{\mu}\arctan\dfrac{X_5}{X_4} - \dfrac{1}{\sin\varphi}\arctan\dfrac{X_3}{X_2}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. A. Kirillov (1976), *Elements of the Theory of Representations*, Springer – Verlag, Berlin – Heidenberg – New York.

[2]. Abellanas L. and Martinez Alonso L**.** (1975), A general setting for Casimir invariants, *J. Math. Phys,* V. 16, 1580 - 1584.

[3]. Beltrametti E. G. and Blasi A. (1966), *On the number of Casimir operators associated with any Lie group,* Phys. Lett., V. 20, 62 - 64.

[4]. Fels M. and Olver P. (1998), *Moving coframes: I. A practical algorithm***,** Acta Appl. Math., V. 51, 161 - 213.

[5]. Fels M. and Olver P. (1999), *Moving coframes: Regularization and theoretical foundations*, Acta Appl. Math., V. 55, 127 - 208.

[6]. Lê Anh Vũ – Nguyễn Công Trí (2006)**,** *Vài ví dụ về các MD5-đại số và các MD5-phân lá đo được liên kết với các MD5-nhóm tương ứng,* Tạp chí Khoa học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, số 42, tr.14 - 32.

[7]. Lê Anh Vũ, Dương Quang Hòa (2007), *Bức tranh hình học các K-quỹ đạo của các MD5-nhóm liên thông đơn liên mà các MD5-đại số tương ứng có ideal dẫn xuất giao hoán bốn chiều*, Tạp chí Khoa học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, số 46 (12), Tr. 16 - 28.

[8]. Le Anh Vu (2003), *Foliations Formed by K – orbits of Maximal Dimension of Some MD5–Groups*, East–West Journal of Mathematics, Vol. 5, N^{O} 3, pp. 159 – 168.

[9]. Le Anh Vu (1993), *Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Co– adjoint Representation of a Class of Solvable Lie Groups,* Vest. Moscow Uni., Math. Bulletin, Vol. 48, N^0 3, 24 – 27.

[10]. Le Anh Vu, K.P. Shum (2008), *On a Subclass of 5-dimentional Solvable Lie Algebras Which Have Commutative Derived Ideal*, Advances in Algebra and Combinatorics, World Scientific Publishing Co., pp. 353 – 371.

[11]. Le Anh Vu (2006), *On a Subclass of 5-dimentional Solvable Lie Algebras Which Have 3-dimentional Commutative Derived Ideal*, East – West Journal of Mathematics, Vol. 7, pp. 13 – 22 .

[12]. Le Anh Vu (1990), *On the Foliations Formed by the Generic K– orbits of the MD4–Groups*, Acta Math.Vietnam, N^0 2, 39 – 55.

[13]. Lê Anh Vũ (2007), *Phân loại lớp các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều*, Tạp chí Khoa học trường Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, số 46, tr. 3-15.

[14]. M. Hausner and J. T. Schwartz (1968), *Lie Group – Lie Algebra*, Gordon and Breach, Sci. Publisher, New York – London – Paris.

[15]. Morozov V. V. (1958), *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order***,** Izv. Vys. Ucheb. Zaved. Matematika, N4 (5), 161-171.

[16]. Mubarakzyanov G. M. (1963), *On solvable Lie algebras***,** Izv. Vys. Ucheb. Zaved. Matematika, N1 (32), 114-124.

[17]. Pauri M. and Prosperi G. M. (1966), *On the construction of the invariants operators for any finite-parameter Lie group*, Nuovo Cimento *A*, V.43, 533-537.

[18]. Pecina-Cruz J. N. (1944), *An algorithm to calculate the invariants of any Lie algebra*, J. Math. Phys, V.35, 3146-3162.

[19]. Turkowski P. (1990), *Solvable Lie algebras of dimention six,* J. Math. Phys, V.31, 1344-1350.

[20]. Vyacheslav Boyko, Jiri Patera and Roman Popovych (2006), *Computation of Lie Algebras by Means of Moving frames*, J. Phys. Math. *Gen*. V.39, 5749 – 5762.

Tóm tắt

Hệ bất biến của một lớp con các đại số Lie giải được 4, 5 chiều

Bài báo này cho một tính toán tường minh hệ bất biến của các MD4-đại số bất khả phân và các MD5-đại số bất khả phân với ideal dẫn xuất giao hoán bằng phương pháp Boyko – Patera – Popovych.

Abstract

The system of invariants of a subclass of solvable Lie algebras of dimension 4 or 5 abstract

The paper give the system of invariants of indecomposable MD4-algebras and indecomposable MD5-algebras having commutative derived ideals by the method of Boyko – Patera – Popovych.