MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỌN HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG VIỆC GIẢI BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

Nguyễn Viết Dũng*

Bài viết này đề cập mối quan hệ giữa Hình học không gian (HHKG) và Phương pháp tọa độ (PPTĐ) trong không gian, đồng thời nêu lên một số phương pháp giải bài toán HHKG bằng PPTĐ.

Một trong những mục tiêu của dạy học môn HHKG là rèn luyện kỹ năng phân tích và tổng hợp, rèn luyện tư duy logic. Vẻ đẹp của toán học thường được kết tinh trong những bài toán HHKG. HHKG và Hình học tọa độ quan hệ mật thiết với nhau. Nhiều bài toán khó của HHKG nếu sử dụng PPTĐ thì lời giải được thực hiện dễ dàng hơn, nhanh hơn, gọn hơn, trong khi giải trực tiếp bằng lý thuyết HHKG thuần túy thì rất phức tạp, đòi hỏi phải có kỹ năng vẽ hình, có khả năng phân tích, tổng hợp và tư duy logic để vẽ thêm đường phụ…

Trong cấu trúc đề thi tốt nghiệp THPT và tuyển sinh đại học, cao đẳng theo chương trình sách giáo khoa mới, các đề bài HHKG thường có hai ý: ý thứ nhất chỉ đòi hỏi kiến thức cơ bản về HHKG để tính thể tích, diện tích, chứng minh hay tính toán một yếu tố không phức tạp; ý thứ hai đòi hỏi khả năng phân tích, tổng hợp và thường phải vẽ thêm đường phụ mới giải quyết được.

Qua nghiên cứu chất lượng các kỳ thi tốt nghiệp THPT theo chương trình phân ban thí điểm và tuyển sinh đại học, cao đẳng trong những năm qua, nhận thấy rằng tỷ lệ học sinh giải được bài HHKG đạt rất thấp, số làm được thì thì chủ yếu là giải quyết được một phần.

Điều này có nhiều nguyên nhân, song có thể thấy rằng do kết cấu chương trình môn hình học ở lớp 12 còn mang nặng tính độc lập, sự phối hợp chưa rõ ràng. Chương trình hình học lớp 12 khá nặng, tiếp nối phần HHKG là PPTĐ trong không gian với khối lượng kiến thức phải giải quyết rất nhiều và nặng nề. Trong phần Phương pháp tọa độ trong không gian cũng có một số bài tập ứng

* ThS, NGƯT. Văn phòng Bộ GD&ĐT tại Tp. HCM

dụng PPTĐ để giải bài toán HHKG, nhưng còn ít và mờ nhạt. Chính vì vậy, mà học sinh chưa được rèn luyện nhiều về kỹ năng này.

Việc chuyển bài toán HHKG sang ngôn ngữ tọa độ đòi hỏi phải có kỹ năng chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn thích hợp trong không gian. Với mỗi bài toán có thể có nhiều cách chọn hệ trục tọa độ khác nhau. Nhưng để chọn được hệ trục tọa độ hợp lý, nhằm giảm bớt các phép biến đổi cồng kềnh, phức tạp thì phải dựa vào đặc điểm của từng dạng toán. Sau đây là một số phương pháp chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn theo sự phân dạng của hình chóp và khối lăng trụ.

Dạng 1: Hình chóp tam giác đều

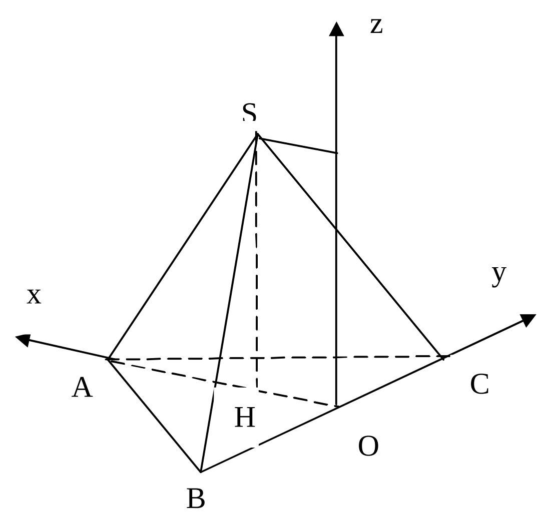
Xét hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, đường cao h

Nhận xét:

Do tính chất hình chóp đều nên hình chiếu của đỉnh trùng với tâm đáy.

Gọi H là trực tâm đáy, kéo dài AH cắt BC tại O là trung điểm BC.

Ta có $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $OH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ và $OA \perp OC$



Cách chọn hệ trục tọa độ Oxyz:

O(0;0;0), $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right);C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$;

Khi đó

$B\left(0;-\frac{a}{2};0\right);S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$

Ví dụ 1: Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. M là một điểm trên cạnh AC sao cho $\text{AM} = \frac{3a}{4}$. Tính khoảng cách giữa SA và BM.

Giải: (tóm tắt).

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

O(0;0;0), $A\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right);C\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$; S(0;0;h)

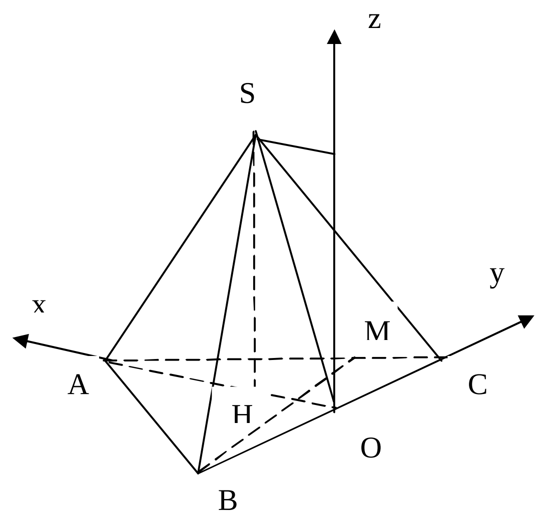
Trong đó h là ẩn số phụ phải xác định theo a.

Vì $SH \perp (ABC); AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAO)$

$\Rightarrow \widehat{SOH} = 60^0$

Trong tam giác SOH: $SH = OH.\tan 60^0$

$\Rightarrow h = \dfrac{a}{2}$, do đó $S\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6};0;\dfrac{a}{2}\right)$; $B\left(0;-\dfrac{a}{2};0\right)$



Áp dụng công thức ta có:

$$d\left(SA;BM\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BM}\right]\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{SA};\overrightarrow{BM}\right]\right|} = \frac{9\sqrt{22}}{88}.$$

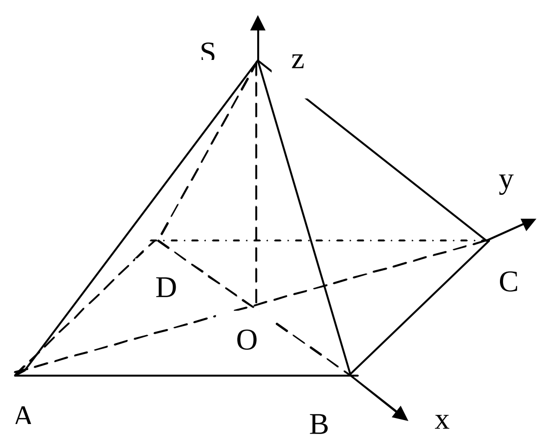
Nhận xét: Bài toán này giải bằng phương pháp HHKG rất phức tạp, vì việc phải vẽ mặt phẳng phụ qua BM và song song với SA hoặc ngược lại, sau đó xác định khoảng từ SA đến mặt phẳng này rất phức tạp về mặt định tính, chưa kể việc tính toán cũng dài dòng. Trong khi sử dụng PPTĐ thì chỉ cần xác định được tọa độ 4 điểm S, A, B, M rồi áp dụng công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng là cho kết quả rất nhanh.

Dạng 2: Hình chóp tứ giác đều

Xét hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, đường cao h.

Nhận xét: Do tính chất hình chóp đều nêngiao điểm O của 2 đường chéo AC và BD là hình chiếu của đỉnh S xuống đáy.

Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}; OB \perp OC$



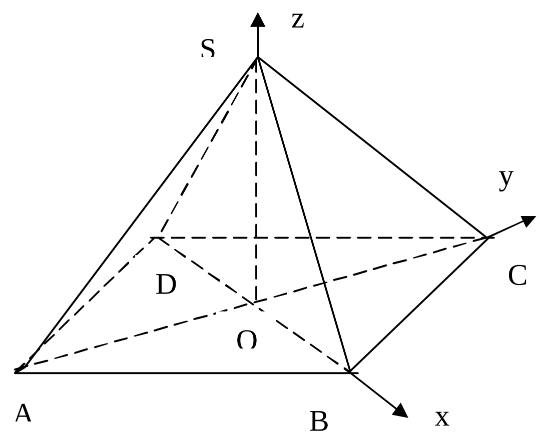
Cách chọn hệ trục Oxyz:

$$O(0;0;0); B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right); S(0;0;h) \Rightarrow D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$$

Ví dụ 2: (Đề thi ĐH Khối B -2007)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

Giải: (tóm tắt)



Chọn hệ trục Oxyz sao cho:.

$$O(0;0;0); B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right);$$

$$S(0;0;h)$$

$$\Rightarrow D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right); A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right).$$

Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm và công thức tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng, ta có:

$$d(MN;AC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC}\right]\overrightarrow{NC}\right|}{\left\|\left[\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC}\right]\right\|} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$

Nhận xét: Với bài này, nếu không dùng phương pháp tọa độ sẽ gặp nhiều khó khăn vì phải vẽ thêm một số đường phụ rất phức tạp và rất khó xác định khoảng cách giữa MN và AC bằng định tính, trong khi dùng PPTĐ thì lời giải rất nhẹ nhàng và rất tự nhiên.

Dạng 3: Hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy.

Nhận xét: Để chọn hệ trục tọa độ thích hợp thì phải tùy thuộc vào tính chất của đáy hình chóp.

– Nếu đáy là tam giác vuông thì chọn gốc tọa độ là đỉnh góc vuông của đáy.

– Nếu đáy là tam giác đều hoặc cân thì chọn trung điểm của cạnh đáy của tam giác đều hoặc cân đó làm gốc tọa độ.

– Nếu đáy là hình vuông, hình chữ nhật thì chọn chân đường vuông góc của cạnh bên vuông góc đó làm gốc tọa độ.

– Các hình còn lại thì dựa vào mối quan hệ giữa các yếu tố giả thiết cho và yêu cầu bài toán để chọn gốc tọa độ một cách thích hợp.

Ví dụ 3: (Đề thi ĐH Khối D-2007)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0; BA = BC = a,\ AD = 2a.$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

Giải: (tóm tắt)

Chọn hệ trục Oxyz sao cho A(0;0;0)

B(a;0;0); D(0;2a;0); S(0;0;$a\sqrt{2}$)

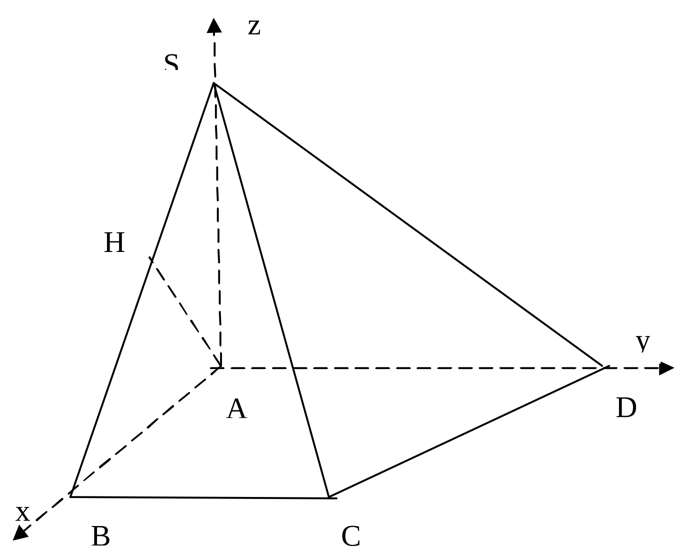
$\Rightarrow C(a;a;0)$.

Gọi $H(h_1;h_2;h_3)$,

do H $\in$ SB và $AH \perp SB$, nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{SB} = 0 \\ \overrightarrow{SH} = t.\overrightarrow{SB} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{2a}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$$

Từ đây tính được $d\left(H;(SDC)\right) = \frac{a}{3}$.



Nhận xét: Bài này nếu không dùng PPTĐ thì việc xác định chân đường vuông góc của H xuống (SCD) rất phức tạp, ta phải nghĩ cách khác "có lý" hơn là mượn việc tính khoảng cách từ B đến (SDC), sau đó nhờ H, B cùng nằm trên SB rồi sử dụng tính chất đồng dạng để suy ra khoảng cách từ H đến (SDC). Song việc tính khoảng cách từ B đến (SDC) dựa vào các giả thiết chỉ có thể thông qua việc tính thể tích chóp B.SDC bằng cách $V_{B.SDC} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABD}$. Điều này quả là phức tạp.

Dạng 4: Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy

Dạng này thông thường chọn hình chiếu vuông góc của đỉnh hình chóp làm gốc tọa độ. Song cũng tùy thuộc vào tính chất của đáy để chọn hệ trục tọa độ thích hợp.

Ví dụ 4: (Đề thi ĐH Khối A-2007)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SB, BC, CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích hình chop CMNP.

Giải: (tóm tắt)

Vì ΔSAD đều nên đường cao $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và H là trung điểm AD, $SH \perp (ABCD)$

Chọn hệ trục tọa Oxyz sao cho:

$H(0;0;0); N(a;0;0); S\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$,

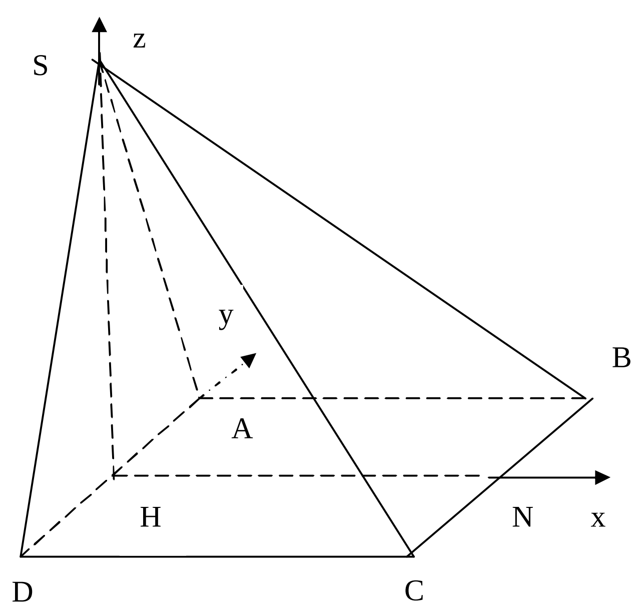
$A\left(0;\frac{a}{2};0\right)$;

suy ra: $D\left(0;-\frac{a}{2};0\right); B\left(a;\frac{a}{2};0\right)$;

$P\left(\frac{a}{2};-\frac{a}{2};0\right); M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Áp dụng công thức tính thể tích của tứ diện, ta có:

$V_{CMNP} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CN}\right]\overrightarrow{CP}\right| = \frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.



Dạng 5: Hình lăng trụ đứng

Giữa hình lăng trụ và hình chóp có mội quan hệ, hình lăng trụ đứng được xây dựng dựa trên hình chóp có một cạnh bên vuông góc với đáy. Do vậy, việc chọn hệ trục tọa độ đối với hình lăng trụ đứng tương tự như dạng 3 ở trên.

Ví dụ 5: (Đề thi ĐH Khối D năm 2008)

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, AB=BC=a, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích lăng trụ ABC.A'B'C' và tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AM, B'C.

Giải: (tóm tắt)

Chọn hệ trục Oxyz sao cho: B(0;0;0); A(a;0;0); C(0;a;0); $B'\left(0;0;a\sqrt{2}\right) \Rightarrow M\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

$$\overrightarrow{AM} = \left(-a;\frac{a}{2};0\right); \overrightarrow{B'C} = \left(0;a;-a\sqrt{2}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-a^2;-a^2\right);$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(-a;a;0\right)$$

Vậy $d\left(AM;B'C\right) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right]\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \dfrac{a}{\sqrt{7}}$.

Dạng 6: Lăng trụ xiên

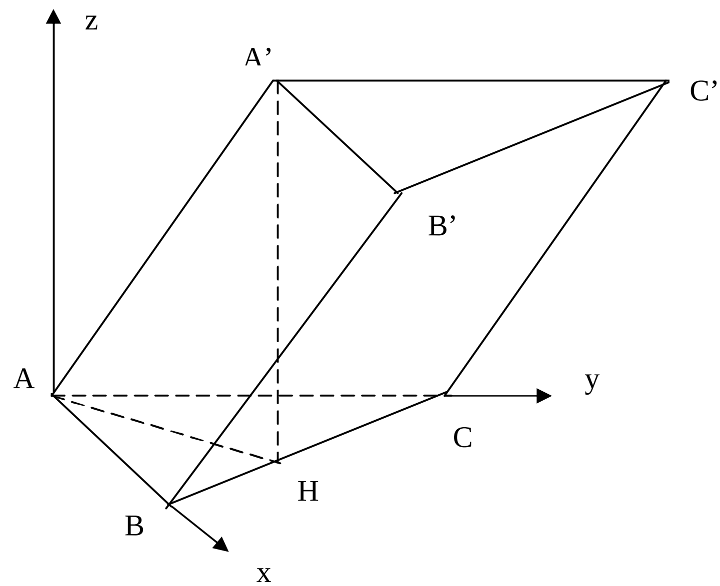
Để chọn được hệ trục tọa độ thích hợp ta phải dựa vào các yếu tố:

Hình chiếu của một đỉnh nằm ở đâu? Có một mặt nào đó vuông góc với đáy không? Đáy là hình gì? Từ đó kết hợp với dạng 3 và dạng 4 ở trên để chọn hệ trục hợp lý.

Ví dụ 6: (Đề thi ĐH Khối A-2008)

Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C'có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB=a, $AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo thể tích khối chop A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA', B'C'.

Giải: (tóm tắt)



Xét $\Delta ABC \perp A$

$AH = \frac{1}{2}BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a$

Xét $\Delta A'HA \perp H$

$\Rightarrow A'H = \sqrt{AA'^2 - AH^2} = a\sqrt{3}$

Tính thể tích trực tiếp bằng cách áp dụng công thức.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz sao cho:

A(0;0;0), B(a;0;0), $C\left(0; a\sqrt{3}; 0\right)$

H là trung điểm BC, nên $H\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$,

do đó $A'\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\sqrt{3}\right)$.

Vì B'C'//BC nên $\cos\left(AA'; B'C'\right) = \cos\left(AA'; BC\right)$. Vậy $\cos\left(AA'; B'C'\right) = \frac{\left|\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{AA'}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{1}{4}$.

Kết luận: Có nhiều phương pháp để giải một bài toán HHKG. Bài viết này khai thác ưu điểm của PPTĐ, đặc biệt là kỹ năng chọn hệ trục tọa độ để giải những bài toán hình học không gian phức tạp, đòi hỏi phải vẽ thêm nhiều đường phụ, mà học sinh thường gặp phải. Điều này cho phép bổ sung vào chương trình Hình học không gian lớp 12 một phần ôn tập cuối năm nhằm nâng cao kiến thức tổng hợp môn hình học THPT.

Tóm tắt

Một số phương pháp chọn hệ trục tọa độ trong việc giải bài toán hình học không gian bằng phương pháp tọa độ

Nội dung chính của bài báo là đề cập quan hệ giữa HHKG và PPTĐ. Đặc biệt, khai thác ưu điểm của phương pháp tọa độ để giải những bài toán hình học không gian phức tạp, đòi hỏi phải vẽ thêm nhiều đường phụ, mà học sinh thường gặp phải trong các kỳ thi tuyển sinh đại, cao đẳng. Điều này cho phép bổ sung vào chương trình Hình học không gian lớp 12 một phần ôn tập cuối năm nhằm nâng cao kiến thức tổng hợp môn hình học THPT.

Abstract

Some methods to choose coordinate axis in solving solid geometry problems by coordinate methods

The content of the article mentions the relationship between solid geometry and coordinate method, especially it develops the strong points of coordinate method to solve some complicated solid geometry problems demanding to draw more extra lines, which students often face with in their university or college examination. The new contribution of the article is added to the 12th grade solid geometry programme to review at the end of the school-year to upgrade the general knowledge about high school geometry.