CHỈNH HÓA BÀI TOÁN NHIỆT NGƯỢC THỜI GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP LẶP LANDWEBER

Phạm Hoàng Quân*, Phan Trung Hiếu

Lê Minh Triết, Nguyễn Quang Huy†

1. Mở đầu

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt nhằm xác định phân bố nhiệt độ tại thời điểm ban đầu t = 0 từ phân bố nhiệt độ đo được tại thời điểm sau đó, chẳng hạn tại t = 1. Bài toán này còn có thể coi như một bài toán điều khiển: bài toán điều khiển phân bố nhiệt độ ban đầu (t = 0) để có thể nhận được phân bố nhiệt độ như ý muốn tại thời điểm t = 1. Đây là một bài toán không chỉnh theo nghĩa là nó không luôn luôn tồn tại nghiệm và ngay cả khi nghiệm của bài toán tồn tại thì nó lại không phụ thuộc liên tục theo dữ kiện. Bài toán này được rất nhiều nhà toán học quan tâm khảo sát. Chúng ta có thể tham khảo [1], trong đó ngoài các tài liệu trích dẫn phong phú, tác giả còn cho ta một cái nhìn tổng quan về các phương pháp khảo sát cũng như chỉ ra những vấn đề còn bỏ ngỏ của bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Cụ thể, trong [2], các tác giả đưa ra nghiệm chỉnh hóa như là tổ hợp tuyến tính một số hữu hạn các hàm riêng của toán tử $-\Delta$ và trong [3], tác giả chỉnh hóa bài toán trong trường hợp tổng quát như là một phương trình vi phân trong không gian Hilbert trừu tượng. Để ý rằng miền phân bố nhiệt khảo sát trong [2] và [3] là các miền bị chặn.

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt trên $\mathbb{R}$. Bài toán sẽ được chuyển về một phương trình tích phân loại tích chập và được chỉnh hóa bằng phương pháp lặp Landweber cũng như đưa ra đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác. Cụ thể, chúng tôi chứng minh rằng nếu sai số giữa dữ kiện chính xác và dữ kiện nhận được do đo đạc là δ thì sai số giữa nghiệm chính xác và nghiệm chỉnh hóa có bậc là $\dfrac{1}{\sqrt{\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}}$ khi $\delta \to 0$.

---

*TS, Đại Học Sài Gòn.

† Đại học Khoa học Tự nhiên Tp.HCM.

2. Phương trình tích phân và chỉnh hóa

2.1. Bài toán thuận

Xét phương trình nhiệt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \ , \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{1}$$

với điều kiện

$$u(x,0) = v(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Bài toán thuận cho phương trình nhiệt được khảo sát là nhằm xác định u(x,t) thỏa hệ thống (1) - (2) với v(x) là hàm liên tục, bị chặn cho trước.

Ta dễ dàng tìm được nghiệm của bài toán là

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4t} \right\} v(\xi) d\xi . \tag{3}$$

2.2. Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt

Xét phương trình nhiệt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \ , \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \tag{4}$$

với các điều kiện

$$u(x,0) = v(x) \qquad x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$u(x,1) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt được khảo sát là nhằm xác định ẩn hàm v sao cho hệ thống (4) - (5) - (6) có một nghiệm u với g là dữ kiện cho trước.

Từ (3), thay t = 1, kết hợp với (6), ta có

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4}\right\}d\xi = g(x). \quad (7)$$

Đây là một phương trình tích phân loại tích chập theo $v(\xi)$ và cũng là một bài toán không chỉnh. Thật vậy, ta đặt

$$K(x) = \sqrt{\pi}\exp\left\{-\frac{x^2}{4}\right\}. \quad (8)$$

Ta có, với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$(K*v)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi)K(x-\xi)d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} v(\xi)\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4}\right\}d\xi$$

và (7) được viết lại thành

$$(K*v)(x) = g(x). \quad (9)$$

Từ (8), ta có

$$\hat{K}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} K(x)e^{-ix\omega}dx = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2} \quad (10)$$

và lấy biến đổi Fourier hai vế của (9), ta nhận được đẳng thức

$$\hat{K}(\omega)\hat{v}(\omega) = \hat{g}(\omega).$$

Xét phương trình

$$P(\hat{v}) = \hat{g}$$

trong đó

$$P : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \quad (11)$$

$$\hat{v} \mapsto P(\hat{v}) = \hat{K}\hat{v}.$$

Phương trình $P(\hat{v}) = \hat{g}$ là không chỉnh vì không thỏa tính tồn tại. Thật vậy, lấy

$$\hat{g} = \hat{K}, \text{ khi đó } \hat{v} = \frac{\hat{g}}{\hat{K}} = 1 \notin L^2(\mathbb{R}).$$

2.3. Chỉnh hóa bài toán nhiệt ngược thời gian bằng phương pháp lặp Landweber

Bây giờ, gọi v_{ex} là nghiệm chính xác cần tìm của (9) ứng với dữ kiện chính xác g_{ex} ở vế phải và gọi g_δ là dữ kiện bị nhiễu nhận được do đo đạc, ta được kết quả sau

Định lí. *Giả sử* $v_{ex} \in L^2(\mathbb{R})$ *và* $\left\| g_\delta - g_{ex} \right\|_2 \le \delta$ *với* $\left\| . \right\|_2$ *là chuẩn trong* $L^2(\mathbb{R})$. *Khi đó, tồn tại nghiệm xấp xỉ ổn định* v_δ *của (9) sao cho* $\left\| v_\delta - v_{ex} \right\|_2 \to 0$ *khi* $\delta \to 0$. *Hơn nữa, nếu* $v_{ex} \in H^1(\mathbb{R})$, $\delta \in (0,1)$ *thì*

$$\left\| v_\delta - v_{ex} \right\|_2 < \frac{C}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}}$$

với C là hằng số thỏa

$$C = 4\max\left\{1, E_1, E_2\right\},$$

trong đó E_1, E_2 *là các hằng số dương sao cho* $\left\| \hat{v}_{ex} \right\|_2 \le E_1$, $\left\| \lambda \hat{v}_{ex} \right\|_2 \le E_2$, *với* $\lambda(x) = |x|$.

Chứng minh. Từ (11), ta có

$$P^2 : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$$

trong đó

$$P^2(\hat{v}) = P\left(P(\hat{v})\right) = P(\hat{K}\hat{v}) = P(\overset{\square}{K} * v) = \hat{K}\overset{\square}{K} * v = \hat{K}\hat{K}\hat{v} = \overset{\square}{K}^2 \hat{v}.$$

Ta có dãy lặp theo phương pháp lặp Landweber :

$$\hat{v}^0 = 0 \quad \text{và} \quad \hat{v}^m = (I - \frac{1}{2\pi}P^2)\hat{v}^{m-1} + \frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g} = (1 - \frac{1}{2\pi}\overset{\square}{K}^2)\hat{v}^{m-1} + \frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}. \quad (12)$$

Bằng cách quy nạp theo m, ta thấy rằng $\hat{v}^m$ có dạng như sau

$$\hat{v}^m = \frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k, \text{ với m = 1, 2,… .} \tag{13}$$

Từ (13), ứng với dữ kiện đo, ta có

$$\hat{v}_\delta^m = \frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k, \text{ với m = 1, 2,… ,} \tag{14}$$

và ứng với dữ kiện chính xác, ta có

$$\hat{v}_{ex}^m = \frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_{ex}\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k, \text{ với m = 1, 2,… .} \tag{15}$$

Ta có

$$\left\|v_\delta^m - v_{ex}\right\|_2 = \left\|\hat{v}_\delta^m - \hat{v}_{ex}\right\|_2 \le \left\|\hat{v}_\delta^m - \hat{v}_{ex}^m\right\|_2 + \left\|\hat{v}_{ex}^m - \hat{v}_{ex}\right\|_2. \tag{16}$$

Trước tiên, ta chứng minh $\left\|\hat{v}_\delta^m - \hat{v}_{ex}^m\right\|_2 \to 0$ khi $\delta \to 0$.

Từ (14) và (15), ta có

$$\hat{v}_\delta^m - \hat{v}_{ex}^m = \frac{1}{2\pi}\hat{K}(\hat{g}_\delta - \hat{g}_{ex})\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k, \text{ với m = 1, 2,… .} \tag{17}$$

Hơn nữa, chú ý đến (10), ta có

$$0 < \frac{1}{2\pi}\left(\hat{K}(\omega)\right)^2 = \frac{1}{2\pi}2\pi e^{-2\omega^2} = e^{-2\omega^2} < 1 \qquad \text{với mọi } \omega \in \mathbb{R},$$

suy ra

$$0 < 1 - \frac{1}{2\pi}\left(\hat{K}(\omega)\right)^2 < 1. \tag{18}$$

Từ (17) và (18), ta có

$$\left|\hat{v}_\delta^m - \hat{v}_{ex}^m\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2}(\hat{g}_\delta - \hat{g}_{ex})\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k\right| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\left|\hat{g}_\delta - \hat{g}_{ex}\right|.$$

Vậy

$$\left|\hat{v}_{\delta}^{m}-\hat{v}_{ex}^{m}\right|^{2}\leq\frac{1}{2\pi}m^{2}\left|\hat{g}_{\delta}-\hat{g}_{ex}\right|^{2}. \qquad (19)$$

Hơn nữa, vì $(\hat{g}_{\delta}-\hat{g}_{ex})\in L^{2}(\mathbb{R})$ nên $(\hat{v}_{\delta}^{m}-\hat{v}_{ex}^{m})\in L^{2}(\mathbb{R})$. (20)

Từ (19) và (20), ta có

$$\left\|\hat{v}_{\delta}^{m}-\hat{v}_{ex}^{m}\right\|_{2}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\left\|g_{\delta}-g_{ex}\right\|_{2}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\delta. \qquad (21)$$

Bây giờ, ta sẽ chọn $m(\delta)$ sao cho $m(\delta)\to\infty$ và $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m(\delta)\delta\to 0$ (khi $\delta\to 0$).

Ta chọn $m(\delta)$ sao cho $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m(\delta)\leq\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Vậy ta chọn

$$m(\delta)=\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right] \qquad (22)$$

trong đó $\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}$.

Khi đó

$$m(\delta)\overset{\delta\to 0}{\to}\infty \text{ và } 0\leq\left\|\hat{v}_{\delta}^{m(\delta)}-\hat{v}_{ex}^{m(\delta)}\right\|_{2}\leq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m(\delta)\delta\leq\frac{1}{\sqrt{\delta}}\delta=\sqrt{\delta}.$$

Vậy

$$\left\|\hat{v}_{\delta}^{m}-\hat{v}_{ex}^{m}\right\|_{2}\to 0 \text{ khi } \delta\to 0. \qquad (23)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\left\|\hat{v}_{ex}^{m}-\hat{v}_{ex}\right\|_{2}\to 0$ khi $m\to\infty$.

Ta có

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k=\frac{1-\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^m}{1-(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2)}=\frac{1-\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^m}{\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2}. \tag{24}$$

Từ (15) kết hợp với (24), ta có

$$\hat{v}_{ex}^m=\frac{1}{2\pi}\hat{K}(\hat{K}\hat{v}_{ex})\frac{1-\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^m}{\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2}=\hat{v}_{ex}\left(1-(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2)^m\right), \tag{25}$$

suy ra

$$\hat{v}_{ex}^m-\hat{v}_{ex}=\hat{v}_{ex}\left(1-(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2)^m\right)-\hat{v}_{ex}=-\hat{v}_{ex}(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2)^m. \tag{26}$$

Từ (26) và (18), ta có

$$\left|\hat{v}_{ex}^m-\hat{v}_{ex}\right|^2=\left|\hat{v}_{ex}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^m\right|^2<\left|\hat{v}_{ex}\right|^2$$

và

$$\left|\hat{v}_{ex}^m-\hat{v}_{ex}\right|^2=(\hat{v}_{ex})^2\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^{2m}\to 0 \text{ khi } m\to\infty.$$

Vì $\hat{v}_{ex}\in L^2(\mathbb{R})$ nên theo Định lí hội tụ bị chặn, ta có

$$\left(\hat{v}_{ex}^m-\hat{v}_{ex}\right)\in L^2(\mathbb{R}) \tag{27}$$

và

$$\left\|\hat{v}_{ex}^m-\hat{v}_{ex}\right\|_2\to 0 \text{ khi } m\to\infty. \tag{28}$$

Từ (16), (23), (28), ta được

$$\left\|v_\delta^m-v_{ex}\right\|_2\to 0 \text{ khi } \delta\to 0.$$

Đặt $v_\delta = v_\delta^m$. Như vậy, ta đã chứng minh được

$$\left\| v_\delta - v_{ex} \right\|_2 \to 0 \text{ khi } \delta \to 0.$$

Bây giờ, với giả thiết $v_{ex} \in H^1(\mathbb{R})$ và $\lambda(x) = |x|$, ta có

$$v'_{ex} \in L^2(\mathbb{R}),$$

suy ra

$$\widehat{v'_{ex}} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Hơn nữa, ta có

$$\widehat{v'_{ex}}(\omega) = i\omega \hat{v}_{ex}(\omega),$$

suy ra

$$\left|\widehat{v'_{ex}}(\omega)\right|^2 = \left|i\omega \hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 = \left|\omega \hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 = \left|\lambda(\omega)\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2.$$

Vậy

$$\lambda \hat{v}_{ex} \in L^2(\mathbb{R}).$$

Từ (27) và (26), ta có

$$\left\|\hat{v}_{ex}^m - \hat{v}_{ex}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1 - \frac{1}{2\pi}\left(\hat{K}(\omega)\right)^2\right)^{2m} d\omega = \int_{\mathbb{R}} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1 - e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega$$

$$= \int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1 - e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega + \int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1 - e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega \qquad (29)$$

trong đó

$$D = \left\{\omega : \omega^2 \le r_\delta^2\right\} \text{ với mọi } r_\delta > 0,\ r_\delta \text{ sẽ được chọn sau}.$$

Với mọi $\omega \in D$, ta có $\omega^2 \le r_\delta^2$, suy ra $1 - e^{-2\omega^2} \le 1 - e^{-2r_\delta^2}$, cho nên

$$\int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega \le \int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} d\omega .$$

Hơn nữa, ta có

$$\int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} d\omega = \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} \int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 d\omega \le \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} \left\|\hat{v}_{ex}\right\|_2^2 .$$

Vậy

$$\int_D \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega \le \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} \left\|\hat{v}_{ex}\right\|_2^2 . \tag{30}$$

Mặt khác, từ (10) và (18), ta có

$$0 < \left(1-e^{-2\omega^2}\right)^{2m} < 1,$$

(31)

suy ra

$$\int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega \le \int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 d\omega . \tag{32}$$

Hơn nữa, với mọi $\omega \notin D$ thì $\lambda^2(\omega) = \omega^2 > r_\delta^2$, suy ra $\dfrac{1}{\omega^2} < \dfrac{1}{r_\delta^2}$, cho nên

$$\int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 d\omega < \frac{1}{r_\delta^2} \int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\lambda(\omega)\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 d\omega \le \frac{1}{r_\delta^2} \int_{\mathbb{R}} \left|\lambda(\omega)\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 d\omega = \frac{1}{r_\delta^2} \left\|\lambda \hat{v}_{ex}\right\|_2^2 . \tag{33}$$

Từ (32) và (33), ta được

$$\int_{\mathbb{R}\setminus D} \left|\hat{v}_{ex}(\omega)\right|^2 \left(1-e^{-2\omega^2}\right)^{2m} d\omega < \frac{1}{r_\delta^2} \left\|\lambda \hat{v}_{ex}\right\|_2^2 . \tag{34}$$

Từ (29), (30), (34), ta được

$$\left\|\hat{v}_{ex}^m - \hat{v}_{ex}\right\|_2^2 < \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^{2m} \left\|\hat{v}_{ex}\right\|_2^2 + \frac{1}{r_\delta^2} \left\|\lambda \hat{v}_{ex}\right\|_2^2 ,$$

suy ra

$$\left\|\hat{v}_{ex}^{m}-\hat{v}_{ex}\right\|_2 \le \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^m \left\|\hat{v}_{ex}\right\|_2 + \frac{1}{r_\delta}\left\|\lambda\hat{v}_{ex}\right\|_2 . \tag{35}$$

Từ (16), (21), (35), ta được

$$\begin{aligned}\left\|v_\delta^{m}-v_{ex}\right\|_2 &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\delta + \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^m \left\|\hat{v}_{ex}\right\|_2 + \frac{1}{r_\delta}\left\|\lambda\hat{v}_{ex}\right\|_2 \\ &\le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\delta + \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^m E_1 + \frac{1}{r_\delta}E_2 \\ &\le C_1\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\delta + \left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^m + \frac{1}{r_\delta}\right\} \end{aligned} \tag{36}$$

với C_1 là hằng số thỏa

$$C_1 = \max\{1, E_1, E_2\}.$$

Hơn nữa, ta có

$$\left(\frac{1}{1-e^{-2r_\delta^2}}\right)^m = \left(1+\frac{e^{-2r_\delta^2}}{1-e^{-2r_\delta^2}}\right)^m \quad \forall m \in \mathbb{N} . \tag{37}$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\left(1+\frac{e^{-2r_\delta^2}}{1-e^{-2r_\delta^2}}\right)^m \ge 1+\frac{me^{-2r_\delta^2}}{1-e^{-2r_\delta^2}} \quad \forall m \in \mathbb{N} . \tag{38}$$

Từ (37) và (38), ta được

$$\left(1-e^{-2r_\delta^2}\right)^m \le \frac{1}{1+\frac{me^{-2r_\delta^2}}{1-e^{-2r_\delta^2}}} < \frac{1}{1+me^{-2r_\delta^2}} \quad \forall m \in \mathbb{N} . \tag{39}$$

Từ (36) và (39), ta được

$$\left\|v_\delta^{m}-v_{ex}\right\|_2 < C_1\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m\delta + \frac{1}{1+me^{-2r_\delta^2}} + \frac{1}{r_\delta}\right\}. \tag{40}$$

Với cách chọn $m(\delta)$ như (22) thì $m(\delta)\to\infty$ và $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}m(\delta)\delta\to 0$ (khi $\delta\to 0$), ta sẽ chọn r_δ sao cho $r_\delta\to\infty$ và $\frac{1}{1+m(\delta)e^{-2r_\delta^2}}\to 0$ (khi $\delta\to 0$).

Ta chọn r_δ sao cho $e^{-2r_\delta^2}=\frac{1}{\sqrt{m(\delta)}}$, suy ra $r_\delta=\sqrt{\frac{\ln(\sqrt{m(\delta)})}{2}}$, khi đó

$$r_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} \infty \text{ và } \frac{1}{1+m(\delta)e^{-2r_\delta^2}}=\frac{1}{1+\sqrt{m(\delta)}}\xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Như vậy, từ (40), với cách chọn $m(\delta)=\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right]$, $r_\delta=\sqrt{\frac{\ln(\sqrt{m(\delta)})}{2}}$, ta được

$$\left\|v_\delta^{m(\delta)}-v_{ex}\right\|_2<C_1\left\{\sqrt{\delta}+\frac{1}{1+\sqrt{m(\delta)}}+\sqrt{\frac{2}{\ln(\sqrt{m(\delta)})}}\right\} \quad (41)$$

với C_1 là hằng số thỏa

$$C_1=\max\{1,E_1,E_2\}.$$

Bây giờ, ta chứng minh với $\delta\in(0,1)$ thì $\left\|v_\delta^{m(\delta)}-v_{ex}\right\|_2<\frac{C}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}}$,

với $C=4\max\{1,E_1,E_2\}$.

Vì $\delta\in(0,1)$ nên $0<\sqrt{\delta}<1$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{\delta}}>1$. Ta dễ dàng có

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)<\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \quad (42)$$

suy ra

$$\delta \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) < \sqrt{\delta} < 1,$$

vì vậy, ta được

$$\sqrt{\delta} < \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} \quad \text{với } \delta \in (0,1). \tag{43}$$

Vì $0 < \sqrt{\delta} < \sqrt{2\pi} - 1$ nên $\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}} > \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi} - 1}$. Ta dễ dàng có

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta}} < \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}} - 1 < \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right] = m(\delta). \tag{44}$$

Từ (42) và (44), ta có

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right) < m(\delta),$$

suy ra

$$\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)} < \sqrt{m(\delta)} < \sqrt{m(\delta)} + 1,$$

vì vậy, ta được

$$\frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} > \frac{1}{\sqrt{m(\delta)} + 1} \quad \text{với } \delta \in (0,1) \text{ và với } m(\delta) = \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right]. \tag{45}$$

Từ (44), ta có

$$\ln(m(\delta)) > \ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right),$$

suy ra

$$\ln(\sqrt{m(\delta)}) > \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right),$$

vì vậy, ta được

$$\sqrt{\frac{2}{\ln(\sqrt{m(\delta)})}} < \frac{2}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} \text{ với } \delta \in (0,1) \text{ và } m(\delta) = \left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right]. \qquad (46)$$

Từ (41), (43), (45), (46), ta được

$$\left\| v_\delta^{m(\delta)} - v_{ex} \right\|_2 < C_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} + \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}} \right\} = \frac{C}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}},$$

trong đó

$$C = 4C_1 = 4\max\{1, E_1, E_2\}.$$

Như vậy, ta đã chứng minh được $\left\| v_\delta - v_{ex} \right\|_2 < \dfrac{C}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}}$ với $\delta \in (0,1)$.

Định lí đã được chứng minh.

2.4. Ví dụ minh họa

Ta xét một ví dụ cụ thể minh họa cho các tính toán lý thuyết ở mục 3.

Xét phương trình nhiệt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$$

với các điều kiện

$$u(x,0) = v(x) \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$u(x,1) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Xét dữ kiện chính xác

$$g_{ex}(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-x^2}{5}},$$

thì

$$\|g_{ex}\|_2 = \left(\frac{1}{5} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-2x^2}{5}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{5} \frac{\sqrt{5}\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{10}},$$

và nghiệm chính xác tương ứng là

$$v_{ex}(x) = e^{-x^2},$$

suy ra

$$\hat{v}_{ex}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ix\omega} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-\omega^2}{4}}.$$

Xét dữ kiện bị nhiễu $g_\delta(x) = (1 + \sqrt[4]{\frac{10}{\pi}}\delta) g_{ex}(x)$, ta có

$$\|g_\delta - g_{ex}\|_2 = \left\| \sqrt[4]{\frac{10}{\pi}} \delta g_{ex} \right\|_2 = \sqrt[4]{\frac{10}{\pi}} \delta \|g_{ex}\|_2 = \sqrt[4]{\frac{10}{\pi}} \delta \sqrt[4]{\frac{\pi}{10}} = \delta.$$

Khi đó, nghiệm chỉnh hoá là

$$v_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{v}_\delta(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

trong đó

$$\hat{v}_\delta(\omega) = \hat{v}_\delta^m(\omega) = \frac{1}{2\pi} \hat{K}(\omega) \hat{g}_\delta(\omega) \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \left(\hat{K}(\omega) \right)^2 \right)^k = \hat{g}_\delta(\omega) \frac{1 - (1 - e^{-2\omega^2})^m}{\sqrt{2\pi} e^{-\omega^2}},$$

với

$$\hat{K}(\omega)=\sqrt{2\pi}e^{-\omega^2},\ \mathrm{m}=\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\delta}}\right],$$

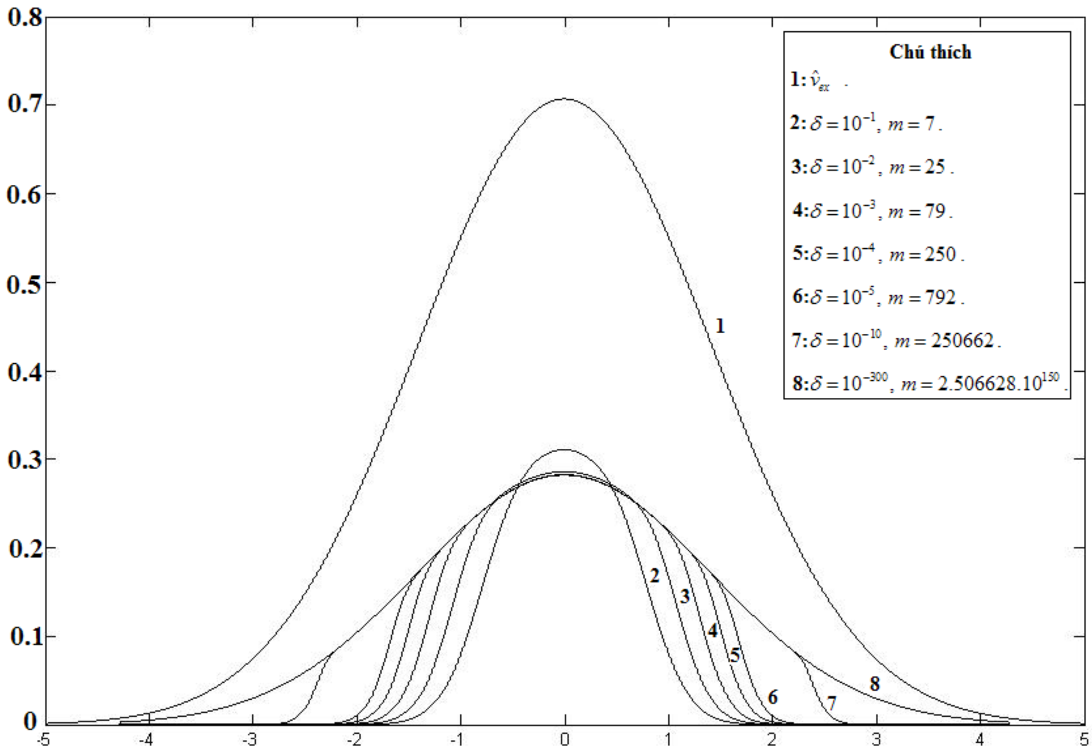
$$\hat{g}_\delta(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g_\delta(x)e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt[4]{\frac{10}{\pi}}\delta\right)e^{\frac{-5\omega^2}{4}}.$$

Ta tính được sai số và đánh giá sai số cho bởi bảng sau

δ	m	$\hat{v}_\delta$	$\left\|v_\delta - v_{ex}\right\|_2 < \frac{C}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)}}$	$\left\|v_\delta - v_{ex}\right\|_2$
10^{-1}	7	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{6}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	4.1735	0.008484
10^{-2}	25	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{24}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	2.9511	0.007992
10^{-3}	79	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{78}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	2.4096	0.007623
10^{-4}	250	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{249}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	2.0867	0.007356
10^{-5}	792	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{791}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	1.8664	0.007172
10^{-10}	250662	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{250661}\left(1-\frac{1}{2\pi}\hat{K}^2\right)^k$	1.3198	0.006813
10^{-30}	$2.506628.10^{150}$	$\frac{1}{2\pi}\hat{K}\hat{g}_\delta\sum_{k=0}^{2.506628.10^{150}-1}\left(1-\frac{1}{2\pi}\right.$	0.2410	0.006729

trong đó

$$\left\|v_\delta - v_{ex}\right\|_2=\left\|\hat{v}_\delta - \hat{v}_{ex}\right\|_2,\ C=2\sqrt{2}\sqrt[4]{2\pi}.$$



Hình vẽ biến đổi Fourier của nghiệm chính xác và biến đổi Fourier của nghiệm chỉnh hóa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Dang Dinh Ang (1990), *On the backward parabolic equation: A critical survey of some current methods*, Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Warsaw, 509-515.

[2] Dang Dinh Ang and Dang Dinh Hai (1990), *On the backward heat equation*, *Annales*, Polomici Mathematici, LII, 29-32.

[3] Dang Dinh Ang (1985), *Stabilized approximate solutions of the inverse time problem for a parabolic evolution*, J. Math. Anal. Appl, 1, 148-155.

[4] Đặng Đình Áng, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Nguyễn Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân (2007), *Biến đổi tích phân*, NXBGD.

[5] Andreas Kirsch (1996), *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer.

[6] Nguyễn Cam, Phạm Hoàng Quân (1998), *Chỉnh hóa một bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt*, Tạp chí Phát triển Khoa học & Công nghệ, Tập 1, số 5.

[7] P.H.Quan, T.N.Lien, D.D.Trong (2005), *A discrete form of the backward heat problem on the plane*, International Journal of evolution equations, Volume 1, Number 3, September.

[8] Pham Hoang Quan, Nguyen Dung (2005), *A backward nonlinear heat equation: regularization with error estimates*, Applicable Analysis, Vol.84, No.4, April.

Tóm tắt

Chúng tôi khảo sát một bài toán ngược thời gian cho phương trình nhiệt. Bài toán được quy về việc khảo sát một phương trình tích phân loại tích chập và được chỉnh hóa bằng phương pháp lặp Landweber với các đánh giá sai số.

Abstract

Regularization of an inverse time problem for the heat equation with Landweber method

We consider an inverse time problem for the heat equation. The problem is formulated as an integral equation of the convolution type and is regularized via the Landweber method with error estimates.